分类号：O174.5.　　　　　　　　单位代码：10422

密　级：　　　　　　　　　　　学　　号：200920204.



山东大学

博士学位论文

论文题目：关于正规族及差分多项式值分布问题的研究

Research on the problems of normal families and value distribution of differences polynomials.

作者姓名　丁杰

学院名称　数学学院

专业名称　基础学院

指导教师　杨连中.

合作导师

2012 年 4 月 20 日



原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的科研成果。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律责任由本人承担。

论文作者签名：丁杰　　日　期：2012.5.27

关于学位论文使用授权的声明

本人完全了解山东大学有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留或向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅；本人授权山东大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文和汇编本学位论文。

(保密论文在解密后应遵守此规定)

论文作者签名：丁杰　导师签名：[illegible]　日　期：2012.5.27

目 录

关于正规族及差分多项式值分布问题的研究

（山东大学数学学院，济南， 250100）

指导老师：

摘 要

上世纪二十年代，芬兰数学家 R. Nevanlinna 以亚纯函数为研究对象，引入了特征函数的概念并且建立了著名的 Nevanlinna 理论，它被认为二十世纪最伟大的数学成就之一. Nevanlinna 理论包括两个基本定理，即 Nevanlinna 第一基本定理和 Nevanlinna 第二基本定理，并且后者显著地推广 Picard 小定理. Nevanlinna 理论不仅是经典函数论发展史上的一个里程碑，而且还标志着现代亚纯函数理论的开端. 现在，Nevanlinna 理论广泛地应用于亚纯函数唯一性、正规族、复微分方程、复动力系统等领域的研究中.

最近在文章 [11] 和 [18] 中，作者分别独立估计了均值函数 $m(r, \frac{f(z+c)}{f(z)})$，其中函数 $f(z)$ 为有穷级亚纯函数. 这个结果可以看做是离散情形下的对数导数引理的对应形式. 在此基础上，许多学者研究了涉及差分形式的值分布问题.

正规族理论是复分析理论中的一个重要分支. 正规族的概念是由 P. Montel 于 1907 年给出，它不仅与值分布理论结合紧密，也在近年来比较活跃的复动力系统研究中有重要应用. 正规族研究的主要目标是寻找正规定则，Bloch 原理在其中起着重要的指导作用，尽管它一般而言并不成立. 中国的学者们，如：杨乐，张广厚，顾永兴，陈怀惠，庞学诚等对正规族理论的推动和发展做出了许多卓越性的贡献. 近些年来，特别是将 Pang-Zalcman 引理以及分担值的思想引入正规族研究之后，亚纯函数的正规族理论研究变得非常活跃，很多杰出的成果为数学家们所获得.

本文中，我们得到了关于亚纯函数差分多项式值分布问题的一些结果，并且研究了涉及分担微分多项式和全纯函数的正规族问题. 论文的结构安排如下:

在第一章中，我们简单介绍了 Nevanlinna 理论、涉及差分形式的 Nevanlinna 理论和亚纯函数正规族理论.

在第二章中，我们利用经典的唯一性中零点和极点分析的方法，研究了亚纯函数差分多项式的值分布问题. 之前涉及差分形式的值分布问题基本是在整函数范围内讨论，我们考虑了亚纯函数时的情形并得到下列结果：

定理 0.1. 假设 f 是一个有穷级亚纯函数， $s(z)$ 为 $f(z)$ 的小函数. 令 $P(z)$ 是一个多项式， m 是集合 $\{z : P(z) = 0\}$ 的势且满足 $\deg(P(z)) - m > 3$，则 $P(f(z)) + f(z+c) - s(z)$ 至少有一个零点. 若 f 是超越亚纯函数，则 $P(f(z)) + f(z+c) - s(z)$ 有无穷多个零点.

定理 0.2. 假设 f 是一个有穷级超越亚纯函数，不以 $c \neq 0$ 为周期， $s(z)$ 是 $f(z)$ 的小函数. 令 $P(z)$， m 如定理 0.1 中所述. 若 $\deg(P(z)) - m > 4$，则 $P(f(z)) + f(z+c) - f(z) - s(z)$ 有无穷多个零点.

我们同样研究了亚纯函数涉及 q 差分形式的值分布问题，得到:

定理 0.3. 假设 f 是一个零级的亚纯函数， $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$， $s(z)$ 是函数 f 的小函数. 多项式 $P(z)$ 如定理 0.1 中的定义. 则 $P(f(z)) + f(qz) - s(z)$ 至少有一个零点. 若 f 是一个超越亚纯函数，则 $P(f(z)) + f(qz) - s(z)$ 有无穷多零点.

在第三章中，我们研究了涉及分担微分多项式的亚纯函数正规族问题，并改进了雷春林和方明亮（见 [32]）的结果. 实际上，我们证明了如下结果：

定理 0.4. 假设 k 是一个正整数， $\mathscr{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族且满足所有函数的零点重数不小于 k，令 $P = a_p z^p + \cdots + a_2 z^2 + z$ 是一多项式且 $a_p, a_2 \neq 0$ ； $p = \deg(P) \geq k+2$. 若对任意的 $f, g \in \mathscr{F}$ 都有 $P(f)G(f)$ 和 $P(g)G(g)$ 在 D 内 IM 分担非零常数 b，其中 $G(f) = f^{(k)} + H(f)$ 是满足条件 $\frac{w}{\deg}|_H \leq \frac{k}{l+1} + 1$ 或者 $w(H) - \deg(H) < k$ 的微分多项式. 则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

定理 0.5. 假设 k 是一个正整数， $\mathscr{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族且满足所有函数的零点与极点的重数分别大于等于 k 和 2，令 $P(z)$ 是一至少具有两个不同零点的多项式. 若对任意的 $f, g \in \mathscr{F}$ 都有 $P(f)G(f)$ 和 $P(g)G(g)$ 在 D 内 IM 分担常数 b，其中 $G(f) = f^{(k)} + H(f)$ 是满足条件 $w(H) - \deg(H) < k$ 的微分多项式. 则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

在第四章中，我们研究涉及分担全纯函数的亚纯函数正规族问题，这些工作改进了方明亮、常建明（见 [13]）和夏吉英、徐焱（见 [57]）等的结果.

定理 0.6. 假设 $\mathscr{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族， $\psi(\not\equiv 0), a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ 是全纯函数，且 k 是正整数. 若对于任意的函数 $f \in \mathscr{F}$ 在区域 D 上都满足 $f \neq 0$,

$P(f) = f^{(k)} + a_{k-1}f^{(k-1)} + ... + a_1 f' + a_0 f \neq 0$ 以及对任意的函数 $f, g \in \mathscr{F}$ 有 $P(f)$ 和 $P(g)$ IM 分担 ψ. 则 $\mathscr{F}$ 在 D 上正规.

关键词: 亚纯函数；整函数；分担值；正规族；差分；有穷级.

Research on the problems of normal families and value distribution of differences polynomials

(School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, China)
Supervisor:

ABSTRACT

In the prime of 20 century, R. Nevanlinna researched on meromorphic functions and introduced the characteristic functions of meromorphic functions. Then he gave the famous Nevanlinna theory which is one of the greatest achievements in mathematics in the 20th century. The Nevanlinna theory is composed of two main theorems, which are called Nevanlinna's first and second main theorems, since the latter one extends the Picard's theorem greatly. The theory not only denoted the beginning of the theory of meromorphic functions, but also is considered to be basis of modern meromorphic function theory. Now, Nevanlinna theory is applied in the fields of uniqueness theory, normal family, complex differential equation and complex dynamics etc..

The recent papers [11] and [18] include independently obtained estimates for the proximity function $m(r, \frac{f(z+c)}{f(z)})$, when $f(z)$ is a meromorphic function of finite order. The results may be viewed as discrete analogues of the lemma on the logarithmic derivative. On this basis, many scholars studied value distribution on difference operators.

The theory of normal family is a important branch of complex analysis, in 1907, P. Montel introduced the concept of normal family. It not only combined with value distribution theory, but also applied in complex dynamics which is a focus of the study now. Our aim is to find the criteria of normal families. Bloch's principle is not true in general, but it still plays an important roll in the theory of normal family. Many Chinese scholars contributed the advancement and development of normal family theory, for example: L. Yang, G. H. Zhang, Y. X. Gu, H. H. Chen, X. C. Peng, M. L. Fang and J. M. Chang and so on. The research on

the normal family theory is a very active international subject in recent decades, especially applying Pang-Zalcman's Lemma and the ideas of sharing values. After that, a lot of elegant fruits were proofed by many mathematicians.

The present thesis involves some new results of value distribution on differences polynomial for meromorphic function and the normal family criteria with sharing values. The dissertation is composed as follows.

In chapter 1, we introduce the general background of Nevanlinna theory, the Nevanlinna theory on differences operators and the Normal family theory of meromorphic function.

In chapter 2, we investigate value distribution on differences polynomial of meromorphic function by the classic methods of uniqueness problem . Our methods are different from ones in the previous theorems. In fact, we obtained the results on meromorphic firstly.

Theorem 0.1. *Let f be a non-constant meromorphic function of finite order, $s(z)$ be a small function of $f(z)$. Suppose that $P(z)$ is a polynomial, m is the cardinality of the set $\{z : P(z) = 0\}$ and $\deg(P(z)) - m > 3$, then $P(f(z)) + f(z+c) - s(z)$ has at least one zero. If f is a transcendental meromorphic function, then $P(f(z)) + f(z+c) - s(z)$ has infinitely many zeros.*

Theorem 0.2. *Let f be a transcendental meromorphic function of finite order, not of period $c(\neq 0)$, and $s(z)$ be a small function of $f(z)$. Suppose that $P(z)$ and m are as in Theorem 0.1. If $\deg(P(z)) - m > 4$, then $P(f(z)) + f(z+c) - f(z) - s(z)$ has infinitely many zeros.*

We also study the same problem on q-differences and obtain:

Theorem 0.3. *Let f be a meromorphic function of zero order, $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $s(z)$ and $P(z)$ satisfy the condition as Theorem 0.1. Then $P(f(z)) + f(qz) - s(z)$ has at least one zero. If f is a transcendental meromorphic function, then $P(f(z)) + f(qz) - s(z)$ has infinitely many zeros.*

In chapter 3, we study some normal criteria of meromorphic function about sharing differential polynomial. Our results improve some obtained results of C. L. Lei, M. L. Fang (see [32]).

Theorem 0.4. *Let k be a positive integer and let $\mathscr{F}$ be a family of meromorphic*

functions in the domain D with the multiplicity of all the zeros are at least k. Let $P = a_p z^p + \cdots + a_2 z^2 + z$ be a polynomial, $a_p, a_2 \neq 0$ and $p = \deg(P) \geq k+2$. If, for each $f, g \in \mathscr{F}$, $P(f)G(f)$ and $P(g)G(g)$ share a non-zero constant b IM in D, where $G(f) = f^{(k)} + H(f)$ be a differential polynomial of f satisfying $\frac{w}{\deg}|_H \leq \frac{k}{l+1} + 1$ or $w(H) - \deg(H) < k$, then $\mathscr{F}$ is normal in D.

Theorem 0.5. *Let k be a positive integer, suppose that $\mathscr{F}$ be a family of meromorphic functions in the domain D the multiplicity of all of whose zeros and poles are at least k and 2 respectively. Let P be a polynomial with two distinct zeros at least. If, for each $f, g \in \mathscr{F}$, $P(f)G(f)$ and $P(g)G(g)$ share a constant b IM in D, where $G(f) = f^{(k)} + H(f)$ be a differential polynomial of f with $w(H) - \deg(H) < k$, then $\mathscr{F}$ is normal in D.*

In chapter 4, we study some normal criteria of meromorphic function about sharing horomorphic function. Our results improve some obtained results of M. L. Fang, J. M. Chang (see [13]) and J. Y. Xia, Y. Xu (see [57]).

Theorem 0.6. *Let $\mathscr{F}$ be a family of meromorphic functions defined in D, let $\psi(\not\equiv 0)$, $a_0, a_1, , ..., a_{k-1}$ be holomorphic functions in D, and k be a positive integer. Suppose that, for every function $f \in \mathscr{F}$, $f \neq 0$, $P(f) = f^{(k)} + a_{k-1}f^{(k-1)} + ... + a_1 f' + a_0 f \neq 0$ and for every pair functions $(f, g) \in \mathscr{F}$, $P(f)$ and $P(g)$ share ψ, then $\mathscr{F}$ is normal in D.*

Key words: Meromorphic functions; entire functions; value sharing; normal family; differences; finite order.

第一章　预备知识

在本章中，我们主要介绍 Nevanlinna 理论 (见 [23], [59], [61]), 正规族理论 (见 [50], [59])) 的一些基本知识以及差分中的 Nevanlinna 理论的基本结果. (见 [10], [18] 等).

§1.1　Nevanlinna 理论的基础知识

上世纪二十年代，芬兰数学家 R. Nevanlinna 以亚纯函数为研究对象，引入了特征函数的概念并且建立了著名的 Nevanlinna 理论，它被认为二十世纪最伟大的数学成就之一. 这一节主要介绍 Nevanlinna 理论的基本概念，常用符号，以及几个基本的定理. 篇幅有限，我们无法将 Nevanlinna 理论的全部内容囊括，本节只将叙述下文中用的的内容.

Nevanlinna 理论广泛地应用于复分析的各个领域，如复微分方程理论，唯一性理论，差分方程等. 下面我们介绍一些 Nevanlinna 理论的基本知识.

对于一个函数 f, 定义它的均值函数 $m(r,f)$, 计数函数 $N(r,f)$, 精简计数函数 $\overline{N}(r,f)$ 和特征函数 $T(r,f)$ 如下:

$$m(r,f):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta,$$

$$N(r,f):=\int_0^r\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}\,dt+n(0,f)\log r,$$

$$\overline{N}(r,f):=\int_0^r\frac{\overline{n}(t,f)-\overline{n}(0,f)}{t}\,dt+\overline{n}(0,f)\log r,$$

$$T(r,f):=m(r,f)+N(r,f).$$

其中 $n(t,f)$ 表示函数 f 在 $|z|\le t$ 中的极点个数 (计重数), $\overline{n}(t,f)$ 表示 f 在 $|z|\le t$ 中的极点个数 (不计重数).

利用特征函数还可以定义函数 f 的级 $\rho(f)$ 和超级 ρ_1 如下:

$$\rho:=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log^+T(r,f)}{\log r},$$

$$\rho_1 := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ \log^+ T(r,f)}{\log r}.$$

定理 1.1.(第一基本定理) 假设 f 是亚纯函数，对任一复数 a，有

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) + O(1).$$

定理 1.2.(第二基本定理) 假设 $f(z)$ 为 $|z| < R(\leq \infty)$ 内一非常数的亚纯函数，$a_v(v=1,2,\cdots,q)$ 为 $q(\geq 2)$ 个互相判别的有穷复数，且 $\min\limits_{1\leq v_1<v_2\leq q} |a_{v_1} - a_{v_2}| \geq \delta > 0$. 若 $f(0) \neq 0, \infty$ $f'(0) \neq 0$, 则对于 $0 < r < R$ 有

$$m(r,f) + \sum_{v=1}^{q} m(r,a_v) \leq 2T(r,f) - N_1(r) + S(r,f).$$

其中

$$N_1(r) = (2N(r,f) - N(r,f')) + N(r,\frac{1}{f'}), \tag{1.1}$$

$$S(r,f) = m(r,\frac{f'}{f}) + m(r,\sum_{v=1}^{q}\frac{f'}{f-a_v}) + q\log^+\frac{2q}{\delta} + \log 2 + \log\frac{1}{|f'(0)|}. \tag{1.2}$$

进一步运用 Nevanlinna 第一基本定理，可得到第二基本定理的另一种形式：

定理 1.2.' 假设 $f(z)$ 为开平面内非常数的亚纯函数. $a_v(v=1,2,\cdots,q)$ 为 $q(\geq 2)$ 个互相判别的复数 (其中有一个复数可以为无穷)，则

$$(q-2)T(r,f) < \sum_{v=1}^{q} N(r,\frac{1}{f-a_v}) - N_1(r) + S(r,f).$$

这里 $N_1(r)$ 仍如 (1.1) 式中的表示，$S(r,f)$ 与定理 1.2 中 $S(r,f)$ 相差有界量.

定理 1.3.(对数导数引理) 假设 $f(z)$ 在 $|z| < R(\leq \infty)$ 内亚纯，若 $f(z) \neq 0, \infty$, 则对于 $0 < r < \rho < R$ 有

$$m(r,\frac{f'}{f}) < 10 + 4\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|} + 2\log^+\frac{1}{r} + 3\log^+\frac{1}{\rho - r} + 4\log^+\rho + 4\log^+ T(\rho,f).$$

根据对数导数引理. 我们可以对 Nevanlinna 第二基本定理中的余项 (1.2) 进行估计.

定理 1.4. 假设 $f(z)$ 为 $|z| < R(\leq \infty)$ 内一非常数的亚纯函数，$S(r,f)$ 由定理 1.2 中的 (1.2) 确定，则当 $f(z)$ 为有穷级时有

$$S(r,f) = O(\log r);$$

当 $f(z)$ 为无穷级时有

$$S(r,f) = O\{\log(rT(r,f))\},$$

可能须除去 r 的一个有穷线测度集.

一般情况下，对数导数引理记为下列形式：

$$m(r, \frac{f'}{f}) = S(r,f).$$

其中 $S(r,f) = o(T(r,f)) \quad (r \to \infty, r \notin E)$, E 为 r 上的线性测度有穷的集合.

§1.2 亚纯函数唯一性理论

亚纯函数唯一性理论主要研究函数条件，使得在这些条件下函数可以唯一确定. 众所周知，任意一个多项式可以由它的零点（使得多项式为零的点的集合）所决定，除去相差一个常数因子外. 但对于超越整函数和超越亚纯函数并不正确，例如：我们熟悉的函数 e^z 和 e^{-z} 不仅有相同的零点，而且有相同的 ± 1 和 ∞ 值点. 因此，怎么唯一确定一个亚纯函数是有意义且复杂的. 在这个领域的研究中，Nevanlinna 值分布理论起着非常重要的作用，本节我们在上节 Nevanlinna 值分布理论的基础上介绍亚纯函数唯一性的发展，基本概念以及基本定理. 由于篇幅限制，只能介绍到唯一性理论的基本定义和定理，其他主要内容可参阅教材 [61]. 为了叙述的方便，我们首先介绍两个基本的概念. 假设 $f(z)$, $g(z)$ 是 D 上的亚纯函数，且 $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. 若 $f-a$ 和 $g-a$ 有相同的零点 (不计重数)，则称函数 f 和 g IM 分担 a. 若 $f-a$ 和 $g-a$ 有相同的零点 (计重数)，则称 f 和 g CM 分担 a.

在上世纪二十年代末，做为 Nevanlinna 理论的一个应用，R. Nevanlinna 证明了任意一个非常数的亚纯函数可以由五个值唯一确定，即著名的五值定理.

定理 1.5.(五值定理) 假设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为两个非常数的亚纯函数，并且 $a_j(j = 1,2,3,4,5)$ 为扩充复平面上的五个判别的复数．如果 f 和 g IM 分担 $a_j(j = 1,2,3,4,5)$，则 $f \equiv g$．

定理 1.6.(四值定理) 假设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为两个非常数的亚纯函数，$a_j(j = 1,2,3,4)$ 为扩充复平面上的四个判别的复数．如果 f 和 g CM 分担 $a_j(j = 1,2,3,4)$ 且 $f(z) \not\equiv g(z)$，则函数 $f(z)$ 是 $g(z)$ 的双线性变换．保持 $a_j(j = 1,2,3,4)$ 中两个复数不变，剩下两个相互调换，则相互调换的两个复数值是函数 $f(z)$ 和 $g(z)$的两个 Picard 例外值．

需要说明的是将五值定理中的复数替换为小函数，结论仍然成立．在 1979 年，Gundersen 将四值定理 (4CM) 的条件减弱为三个值 CM 分担和一个值 IM 分担 (3CM+1IM)，然后于 1983 年，进一步减弱为两个值 CM 分担和两个值 IM 分担 (2CM+2IM)．而四值定理的条件是否可以进一步减弱为一个值 CM 分担和三个值 IM 分担 (1CM+3CM) 依然没有答案．

在本文的第二章中，我们使用了亚纯函数唯一性理论中经典的构造函数以及对构造函数进行零点、极点分析的方法，证明了几个亚纯函数涉及差分形式多项式的值分布问题．

§1.3 亚纯函数正规族理论

二十世纪初，P. Montel 引进了正规族的概念，他把具有某种列紧性的函数族称为正规族．正规族理论的研究不仅有重要的理论意义，而且有重要的应用价值．如：近些年比较活跃的复动力系统学中的基本概念 (Julia 集和 Fatou 集) 都是由正规族引出．不仅如此，Julia 和 Fatou在二十世纪二十年代做出复动力系统的奠基性研究中，Montel 正规定则扮演着不可或缺的角色．正规族理论研究的核心问题是寻找正规定则，P. Montel 首先把正规族与函数取值的问题联系在一起，即经典的 Montel 正规定则．其后的发展中，值分布理论在正规定则的证明过程里起着重要作用．在上部分介绍完 Nevanlinna 值分布理论之后，本节我们将围绕理论的基本概念，基本定理以及正规族理论的发展进行叙述，由于篇幅

原因，我们只重点介绍本文中用的的内容，详细内容可以参考教材 [50] 等.

为了下文方便，我们首先介绍正规族的几个基本概念：

定义 1.1. 假设 $z_1, z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ 是两个复数，则 z_1, z_2 的球面距离为

$$X(z_1, z_2) = \frac{\|z_1 - z_2\|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}.$$

另外，亚纯函数 $f(z)$ 的球面导数定义为：$f^{\#}(z) = \dfrac{|f'(z)|}{(1+|f^2(z)|)}$.

结合球面距离的概念，我们可以给出函数族正规的准确定义：

定义 1.2. 假设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 内的亚纯函数族. 如果 $\mathscr{F}$ 中任意一函数列 $f_n(z)$ 都存在按球面距离内闭一致收敛的子列 f_{n_k}，则称函数族 $\mathscr{F}$ 在区域 D 上正规.

对于全纯函数的情形，我们给出一个定义的等价形式，具体叙述是：假设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 内的全纯函数族. 若函数族 $\mathscr{F}$ 中任意函数列 $f_n(z)$ 都存在一个子列 f_{n_k} 在区域 D 上内闭一致收敛到一全纯函数或者一致趋于 ∞，则称函数族 $\mathscr{F}$ 在区域 D 内正规.

关于函数族在一区域内正规与其在区域内的点上正规的关系如下:

定理 1.7. 假设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数，则 $\mathscr{F}$ 在区域 D 内正规的充要条件为它在区域 D 内的每一点正规.

正规族理论的发展可分为三个阶段，第一阶段，数学工作者的研究主要集中在全纯函数情形，而以亚纯函数为对象的研究成果并不多. 首先， P. Montel 以模函数为工具证明了 Montel 正规定则，但这种个方法似乎难以更深入地研究正规族理论. Nevanlinna 值分布理论的产生使得正规族与函数导数的取值问题联系起来成为可能，并且简化了上述 Montel 定理的证明. 二十世纪三十年代，随着 Nevanlinna 值分布理论应用到正规族理论研究中促使正规族理论达到了一个高峰，这个阶段中的主要结果有著名的 Marty 定则， Miranda 定则以及庄圻泰正规定则等，其中 Marty 定则是关于亚纯函数情形的.

定理 1.8.(Marty 定则) 设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, $\mathscr{F}$ 在区域 D 内正规的充要条件为对区域 D 内的任一有界闭集 D_1, 都存在一个常数 M, 使得

球面导数

$$f^{\#}(z) = |f'(z)|/(1+|f^2(z)|) \le M, \quad \forall f \in \mathcal{F}, z \in D_1.$$

定理 1.9.(Montel 定则) 设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数, a, b, c 为三个判别的复数 (其中之一可以为无穷). 如果 $\mathscr{F}$ 中的每一个函数在区域 D 均不取 a, b, c, 则 $\mathscr{F}$ 在区域 D 内正规.

定理 1.10.(Miranda 定则) 设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 内的一全纯函数族, k 是一个正整数, 若 $\mathscr{F}$ 中的每一个函数 f 在区域 D 内不取 0, 且其导数 $f^{(k)}$ 不取 1 , 则 $\mathscr{F}$ 在区域 D 内正规.

第二个阶段是二十世纪五六十年代到八十年代. 1959 年, W. K. Hayman 建立了著名的不等式并提出猜想: 一个亚纯函数族在 Miranda 定则的条件保持不变的情形下是否仍保持其正规性? 1979 年, 顾永兴证明了这个猜想. 其后以 W. K. Hayman 所提出的几个猜想为主线获得了一系列新的正规定则, 其中大部分由我国数学工作者完成. 值得一提的是: 到二十世纪八十年代中期, W. K. Hayman 猜想全部被证实, 这标志着正规族理论研究达到一个相对更高的阶段.

在上述两个阶段中, 人们对正规定则的研究绝大部分采用的是 Miranda 的方法, 即消去原始值的方法. 它的原理是: 依据 Nevanlinna 值分布理论得到一个界囿定理 (不等式), 再消去原始值, 证明中需要很高的技巧. 因此使得某些正规定则的证明过程也非常复杂.

第三阶段应该追溯到 1975 年以色列数学家 L. Zalcman 的一篇论文. 他在文中另僻蹊径, 从 Marty 定则给出了一族亚纯函数不正规的充分必要条件, 由此导出一个有趣的正规定则并应用它证明了一些正规定则. 到 20 世纪 80 年代末, 我国的数学工作者改进了 L. Zalcman 的结果. 他们把 L. Zalcman 的结果与导函数联系, 这种方法不仅简化了原来正规定则的证明, 而且建立了一系列新的正规定则. 它被称为 Zalcman-Pang 方法. 这时期正规定则的研究主要是两个反面展开: 一、对 Hayman 猜想的深化, 我国数学工作者在正规族领域的研究一直处于前沿地位. 二、将正规族和唯一性问题联系起来考虑, 这个想法是由 W.Schwich 首先提出, 这方面的成果主要由以色列和我国数学工作者取得.

下面, 我们介绍一下 Bloch 原理的内容以及它在正规族理论中的作用. Bloch

猜测对应于一个 Picard 型定理, 必然存在一个相应的正规定则. 具体叙述为: 假设 P 是一个亚纯函数性质, 如果亚纯函数 f 在复平面的区域 D 内满足性质 P, 则有函数 P 蜕化为常数函数. 那么对于定义在区域 D 内的亚纯函数族 $\mathscr{F}$, 若函数族中的任意函数在 D 上都满足性质 P , 则 $\mathscr{F}$ 在区域 D 内正规. 如果我们约定性质 P 为函数在区域内有界, 则很容易得到关于 Bloch 原理一个最简单的例子: Liouville 定理说有界的全纯函数是常函数, 另外全纯函数族 $\mathscr{F}$ 在区域 D 内正规, 如果对于函数族中任意的函数 f, 以及任意的 $z \in D$ 都有 $|f(z)| \leq M$ 成立, 其中 M 为常数. 需要指出的是对于函数族中任意的函数 f, 存在常数 $K = K(f)$ 使得在区域 D 内都有 $|f(z)| \leq K(f)$ 时, 函数族不一定正规. 事实上, 我们有例子可以说明. 假设在单位圆盘上定义函数族 $\mathscr{F} = \{f_n : n \in N\}$, 其中 $f_n(z) = nz$. 函数族中每个函数都有界, 但函数族在单位圆盘内并不正规. 因此为了使得性质 "函数有界" 能引导出一个正规族, 函数族一致有界是必要条件. 另外不难看出假如性质 P 为亚纯函数在复平面上有三个例外值, 则 Picard 定理与 Montel 正规定则也是 Bloch 原理的一个例子. 虽然 Bloch 原理并不准确 (存在反例, 参考 [49]), 但仍然是寻找正规定则的最有效的途径. 最后为了下文的需要, 我们介绍 Hurwits 定理, 具体的内容为: 假设一函数列 f_n 在区域 D 内解析, 且在区域 D 内内闭一致收敛到一个不恒为零的函数 $f(z)$, 若 γ 是区域 D 内任意可求长的简单闭曲线, 且不经过函数 $f(z)$ 的零点. 则当 n 充分大时, 在曲线 γ 内函数 $f_n(z)$ 与极限函数 $f(z)$ 有相同的零点. 为了方便应用, 我们给出 Hurwits 定理的一个推论形式是: 假设一函数列 f_n 在区域 D 内解析且无零点, 函数列在 D 内内闭一致收敛到一个函数 $f(z)$, 则极限函数 $f(z)$ 恒为 0 或者亦无零点. Hurwits 定理在证明正规定则时有重要作用, 证明一般运用反证法, 由 Zalcman 引理出发, 运用 Hurwits 定理以及值分布理论得到矛盾. Hurwits 定理的证明可由我们熟悉的幅角原理得到.

§1.4 涉及差分形式的 Nevanlinna 理论

在上述 Nevanlinna 值分布理论的基础上, 我们叙述涉及差分形式的值分布理论. 涉及差分形式的值分布理论近几年成为研究的热点问题之一, 我们熟悉 Nevanlinna 理论中第二基本定理起着非常重要的作用, 而对数导数引理是完成第二基本定理证明的基础. 正如对数导数引理在 Nevanlinna 理论中的作用一样,

对数导数引理对应的差分形式的证明奠定了差分中 Nevanlinna 理论的研究. 这个证明的证明是由 Halburd 和 Korhonen [18, 19] 与 Chiang 和 Feng [11] 分别独立完成. 下面我们将介绍对数导数引理对应的差分形式已经涉及差分形式的 Nevanlinna 值分布理论的基本定理.

定理 1.11.([18], 推论 2.1) 假设 $f(z)$ 是非常数有穷级亚纯函数, $c\in\mathbb{C}$ 且 $\delta\in(0,1)$, 则

$$m\left(r,\frac{f(z+c)}{f(z)}\right)=o\left(\frac{T(r+|c|,f)}{r^{\delta}}\right)$$

对于所有的 r 成立, 至多存在一对数测度有穷的例外集.

定理 1.11 的另一种形式为:

定理 1.12.([19], 定理 2.1) 假设 $f(z)$ 是非常数有穷级亚纯函数, $c\in\mathbb{C}$ 且 $\delta\in(0,1)$, 则

$$m\left(r,\frac{f(z+c)}{f(z)}\right)+m\left(r,\frac{f(z)}{f(z+c)}\right)=o\left(\frac{T(r,f)}{r^{\delta}}\right)=S(r,f)$$

对于所有的 r 成立, 至多存在一对数测度有穷的例外集.

定理 1.13.([11], 推论 2.5) 假设 $f(z)$ 是非常数有穷级亚纯函数, 级为 ρ, 且 $c\in\mathbb{C}$. 则对于任意的 $\epsilon>0$ 都有

$$m\left(r,\frac{f(z+c)}{f(z)}\right)=O(r^{\rho-1+\epsilon}).$$

最近, 上述结果被进一步推广到到超级小于 1 的情形, 其结果叙述如下:

定理 1.14.([21], 定理 5.1) 假设 $f(z)$ 是非常数亚纯函数, 超级 $\rho_1<1$, 且 $c\in\mathbb{C}$. 则对于任意的 $\epsilon>0$

$$m\left(r,\frac{f(z+c)}{f(z)}\right)=o\left(\frac{T(r,f)}{r^{1-\rho_1+\epsilon}}\right)$$

对于所有的 r 成立, 至多存在一对数测度有穷的例外集.

到此为止, 我们完成了预备知识的介绍和叙述, 有了这部分基础知识之后, 下面我们进入论文的主要内容.

第二章　涉及差分形式的值分布问题研究

差分形式对数导数引理的建立拉开了涉及差分形式 Nevanlinna 值分布理论研究的序幕. 由于 Hayman 定理在 Nevanlinna 值分布理论中的重要地位, Hayman 定理的差分对应形式的研究就成为差分值分布理论的热点之一. 本章中, 我们考虑了涉及差分形式的值分布问题, 得到了两个关于亚纯函数的涉及差分形式值分布问题的定理, 之前的结果基本都是关于整函数情形下的值分布问题. 在涉及差分形式的值分布问题中, 当函数是整函数时由于函数为有穷级, 则定理的证明主要工具是 Hadamard 因子分解定理以及 Clunie 引理. 而当函数是亚纯函数时, 一般通过 Nevanlinna 值分布理论中特征函数的性质建立不等式, 从而完成定理的证明. 在这一章中, 我们运用亚纯函数唯一性问题中经典的构造函数以及分析零点和极点的方法建立了关于特征函数的一个不等式, 从而完成了亚纯函数情形下的定理证明, 这个结果改进了之前的工作. 为了方便阅读, 本章的结构如下: 第一节为引言及主要结果, 我们主要介绍了几个常用的符号, 在此基础上介绍了研究问题的背景, 以及目前的一些重要结果, 其中几乎都是关于整函数的结论. 最后给出了本章的两个主要定理, 定理的直接推论以及相应的涉及 q 差分的亚纯函数情形下的结果. 第二节我们列出了定理证明中需要的所有引理. 在第三节、第四节和第五节是定理的证明, 我们详细的叙述了本章主要定理的证明, 而在第五节中删减了定理 2.5 证明过程中与之前过程重复的部分. 在最后一部分我们在总结前面结果的基础上给出了后续问题的研究展望以及需要改进的地方.

§2.1　引言及主要结果

如果函数 $f(z)$ 在复平面上除极点外是一个解析函数, 则称 $f(z)$ 是一个亚纯函数. 本章中涉及差分形式的 Nevanlinna 理论中的符号与传统的符号一致, 比如: 特征函数 $T(r,f)$, 均值函数 $m(r,f)$, 计数函数 $N(r,f)$ 等. 另外我们用 $\lambda(f)$ 表示函数 $f(z)$ 的零点收敛指数, $\lambda(\frac{1}{f})$ 表示函数 $f(z)$ 的极点收敛指数.

1959 年, W. K. Hayman 证明了下面两个定理:

定理 2A.([22]) 假设 f 是一个非常数的超越整函数，$n \geq 3$ 是正整数且 a 为非零常数. 则 $f'(z) - af^n(z)$ 取所有的有穷值无穷多次.

定理 2B.([22]) 假设 f 是一个非常数的超越亚纯函数，$n \geq 5$ 是正整数且 a 为非零常数. 则 $f'(z) - af^n(z)$ 取所有的有穷值无穷多次.

最近，Halburd 和 Korhonen [18, 19] 与 Chiang 和 Feng [11] 分别独立证明了涉及差分形式的对数导数引理. 接下来，有许多学者研究了涉及差分形式的值分布理论 (见：[2]; [9]; [10]; [26]; [27] 等).

假设 f 为超越亚纯函数，下文中关于差分 $\Delta^n f$ 的记号如文 [54] 所定义.

$$\Delta f(z) = f(z+1) - f(z), \quad \Delta^{n+1} f(z) = \Delta^n f(z+1) - \Delta^n f(z), \ n = 0, 1, 2, \cdots$$

在文 [54] 中，作者首次考虑了 $\Delta^n f$ 是否一定有零点的问题. Bergweiler 和 Langley [4] 进一步考虑这个问题，得到了：

定理 2C. 假设 $n \in \mathbb{N}$ 且 f 是一个级 $\rho < \frac{1}{2}$ 的超越整函数，记

$$G(z) = \frac{\Delta^n f(z)}{f(z)}.$$

如果 $G(z)$ 为超越的，则 $G(z)$ 有无穷多个零点. 特别地，若函数 f 的级小于 $min\{\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\}$，则 $G(z)$ 为超越的且有无穷多个零点.

对于一阶的差分分式，定理 2C 中对于级的限制可以推广如下：

定理 2D. 存在 $\delta_0 \in (0, \frac{1}{2})$ 满足下面的性质，假设 f 是一个超越整函数且级满足：

$$\rho(f) \leq \delta < \frac{1}{2} + \delta_0 < 1.$$

则

$$G(z) = \frac{\Delta f(z)}{f(z)} = \frac{f(z+1) - f(z)}{f(z)}.$$

有无穷多个零点.

进一步，在文 [4] 中考虑了 $f(z+c) - f(z)$ 的零点存在性问题，证明了下面几个定理.

定理 2E. 假设 f 是一个超越亚纯函数且下级 $\sigma(f) < 1$, 设 $c \in \mathbb{C}\setminus 0$ z_j, z_k 为函数 f 的极点且满足 $z_j - z_k = c$ 的极点至多为有穷多个. 则函数 $f(z+c)-f(z)$ 有无穷多个零点.

对于给定的函数 f 几乎所有的 $c \in \mathbb{C}$ 满足定理 2E 的条件, 但下面的定理说明: 即使函数的下级为零, 定理 2E 关于常数 c 的假设亦是必要条件.

定理 2F. 假设 $\phi(r)$ 是 $[1,\infty)$ 上非减的正函数且有 $\lim_{r\to\infty}\phi(r) = \infty$ 成立, 则存在复平面上的超越亚纯函数 f 满足:

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{T(r,f)}{r} < \infty$$

和

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(r,f)}{\phi(r)\log r} < \infty,$$

使得函数 $g(z) = \Delta f(z) = f(z+1) - f(z)$ 仅有一个零点。此外有

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{T(r,g)}{\phi(r)\log r} < \infty.$$

另外, 对于增长级足够小的超越亚纯函数, 一阶差分或者一阶差分的商有无穷多个零点.

定理 2G. 假设 f 是一个超越亚纯函数且 $T(r,f) = O(\log r)^2$ $r\to\infty$, 令 $g(z) = \Delta f(z) = f(z+1) - f(z)$, $G(z) = \dfrac{\Delta f(z)}{f(z)} = \dfrac{f(z+1)-f(z)}{f(z)}$. 则函数 G 或者 g 至少一个有无穷多个零点.

Laine 和杨重骏 [31] 研究了涉及差分算子的整函数值分布问题, 得到了:

定理 2H. 假设 f 是一个有穷级超越整函数, 且 $c \neq 0$ 为常数. 则对于 $n \geq 2$ 时, $f^n(z)f(z+c)$ 取任意非零值无穷多次.

刘凯和 Laine [37] 于 2010 年证实了下面的结果:

定理 2I. 假设 f 是一个有穷级超越整函数, 并不以 $c \neq 0$ 为周期. 令 $n \geq 3$ 是正整数, $s(z) \not\equiv 0$ 是 f 的小函数. 则 $f^n(z) + f(z+c) - f(z) - s(z)$ 在复平面上有无穷多个零点.

定理 2J. 假设 f 是一个有穷级超越亚纯函数, 并不以 $c \neq 0$ 为周期. a 为非零常数, 且 $s(z) \not\equiv 0$ 是 f 的小函数. 假设 $n \geq 8$, 则 $f^n(z)+a(f(z+c)-f(z))-s(z)$ 在复平面上有无穷多个零点.

上述定理是刘凯通过建立关于特征函数的不等式得到的一个亚纯函数情形下的结果. 在文 [36] 中, 刘凯提出: 差分多项式 $f^n(z)+a(f(z+c)-f(z))-s(z)$ 在条件 $3 \leq n \leq 7$ 的情形下是否有无穷多个零点. 本章考虑亚纯函数情形下涉及差分形式的多项式值分布问题. 我们把经典唯一性问题中的构造函数与函数零点、极点分析的方法应用到这个问题中, 得到了更为准确的关于特征函数的一个不等式, 从而证明了更为复杂的差分多项式形式下的结果. 作为本章主要定理的应用, 我们部分回答了上述提到的问题, 得到了在 $n=6$ 和 $n=7$ 时, 定理的结论仍然成立 (见推论 2.3).

在文 [9] 中, 陈宗煊考虑与定理 2A 相对称的差分形式, 证明了 Hayman 定理关于整函数情况的差分类似形式.

定理 2K. 假设 f 是一个有穷级超越整函数, 并不以 $c \neq 0$ 为周期. 令 $n \geq 3$ 是正整数, $a(\neq 0), b, c\ (\neq 0)$ 为三个复数. 则 $\Psi_n(z) = f(z+c) - f(z) - af^n(z)$ 取所有复数无穷多次, 而且对任意 b 都有 $\lambda(\Psi_n(z) - b) = \rho(f)$.

祁晓光和刘凯 [48] 研究了非线性差分方程超越整函数解的存在性. 作为一个应用, 他们得到了下面的结果:

定理 2L. 假设 f 是一个有穷级超越整函数, 并不以 $c \neq 0$ 为周期, m 和 n 为正整数满足 $n \geq m > 0$. 令 λ, μ 为两个复数且 $|\lambda| + |\mu| \neq 0$. 如果 $n \geq 2$, 则 $f^n(z)(\lambda f^m(z+c) + \mu f^m(z))$ 取所有非零有穷复数无穷多次, 或者 $f(z) = \exp\{\frac{\log t}{c} z\} g(z)$ 成立, 其中 $t = (-\frac{\mu}{\lambda})^{\frac{1}{m}}$, $g(z)$ 是以 c 为周期的周期函数.

以上关于 Hayman 定理差分形式的结果基本都是关于整函数的情形. 本章的目的是研究关于亚纯函数的情形, 我们运用唯一性问题的经典方法, 得到了下面的定理:

定理 2.1. 假设 f 是一个有穷级亚纯函数, $s(z)$ 为 $f(z)$ 的小函数. 令 $P(z)$ 是一个多项式, m 是集合 $\{z : P(z) = 0\}$ 的势且满足 $\deg(P(z)) - m > 3$, 则 $P(f(z)) + f(z+c) - s(z)$ 至少有一个零点. 若 f 是超越亚纯函数, 则

$P(f(z)) + f(z+c) - s(z)$ 有无穷多个零点.

标注 2.1. 当我们用 $P(f(z)) + \prod_{i=1}^{m} f(z+c_i)$ $(c_i \in \mathbb{C})$ 替换定理 2.1 中的差分多项式 $P(f(z)) + f(z+c)$ 时，相应的结论依然成立. 取 $P(z) = z^n, m = 2$ 以及 $c_0 = 0$, 则我们可以得到定理 2L 的亚纯函数的情形.

我们考虑了定理 2B 对应的差分形式，得到下面的结果：

定理 2.2. 假设 f 是一个有穷级超越亚纯函数，不以 $c \neq 0$ 为周期，$s(z)$ 是 $f(z)$ 的小函数. 令 $P(z)$，m 如定理 2.1 中所述. 若 $\deg(P(z)) - m > 4$, 则 $P(f(z)) + f(z+c) - f(z) - s(z)$ 有无穷多个零点.

推论 2.3. 假设 f 是一个有穷级超越亚纯函数，$s(z)$ 是 $f(z)$ 的小函数. 若 $n > 5$, 则差分多项式 $f^n(z) + f(z+c) - f(z) - s(z)$ 有无穷多个零点.

推论 2.4. 假设 f 是一个穷级超越亚纯函数，且 a 是非零复数. 若 $n > 5$, 则差分多项式 $f(z+c) - f(z) + af^n(z)$ 取每个有穷值无穷多次.

标注 2.2. 推论 2.3 和推论 2.4 分别将定理 2I 和定理 2K 推广到亚纯函数的情形. 推论 2.4 是 Hayman 定理在亚纯函数情形下涉及差分的对应定理，它改进了定理 2J 的结果.

张继龙和 Korhonen [67] 研究了关于亚纯函数 q 差分的值分布问题. 受定理 2.1 启发，我们证明了下面的关于 q 差分多项式值分布的结论.

定理 2.5. 假设 f 是一个零级的亚纯函数，$q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，$s(z)$ 是函数 f 的小函数，多项式 $P(z)$ 如定理 2.1 中的定义. 则 $P(f(z)) + f(qz) - s(z)$ 至少有一个零点. 若 f 是一个超越亚纯函数，则 $P(f(z)) + f(qz) - s(z)$ 有无穷多零点.

标注 2.3. 本章的一些想法来自文章 [17].

§2.2 主要引理

为了证明本章的定理，我们需要下面的引理.

引理 2.1.([61]) 假设 $f(z)$ 为亚纯函数，且 $P(f) = a_0 f^n + a_1 f^{n-1} + \cdots a_n$，其中 $a_0(\neq 0), a_1, \cdots, a_n$ 为函数 f 的小函数．则

$$T(r, P(f)) = nT(r, f) + S(r, f).$$

引理 2.2.([1]) 假设 f 为零级亚纯函数，且 $q \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$．则

$$m(r, \frac{f(qz)}{f(z)}) = S(r, f(z)).$$

引理 2.3.([67]) 假设 f 为零级亚纯函数，且 $q \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$．则

$$N(r, f(qz)) = N(r, f(z)) + S(r, f(z))$$

在对数密度为 1 的集合上成立．

引理 2.4. 假设 $f(z)$ 为有穷级亚纯函数，且 $c \in \mathbb{C}$．则

$$N(r, f(z+c)) = N(r, f(z)) + S(r, f(z)).$$

证明: 应用定理 1.11 以及文 [27] 中公式 (12) 有：

$$N(r, f(z+c)) \leq N(r, f(z)) + S(r, f(z)).$$

将上式中的 $f(z-c)$ 替换为 $f(z)$，可以得到：

$$N(r, f(z)) \leq N(r, f(z-c)) + S(r, f(z-c)) = N(r, f(z-c)) + S(r, f(z)),$$

对任意 $c \in \mathbb{C}$ 成立．因此有：

$$N(r, f(z)) \leq N(r, f(z+c)) + S(r, f(z)).$$

由上面的讨论可以直接推出：

$$N(r, f(z+c)) = N(r, f(z)) + S(r, f(z)). \quad \square$$

§2.3 定理 2.1 的证明

我们记 $\Phi(z)=P(f)+f(z+c)-s(z)$. 明显地, $\Phi(z)\not\equiv C$. 如果结论不成立, 则 $P(f)\equiv f(z+c)-s(z)+C$, 因此我们有:

$$T(r,P(f))=nT(r,f)=T(r,f(z+c))+S(r,f), \tag{2.1}$$

其中 $n=deg(P)>3$. 应用定理 1.11 以及引理 2.4, 可以推导出:

$$T(r,f(z+c))=m(r,f(z+c))+N(r,f(z+c))=m(r,f(z))+m(r,\frac{f(z+c)}{f(z)})$$

$$+N(r,f(z))+S(r,f(z))=T(r,f(z))+S(r,f(z)). \tag{2.2}$$

而 (2.1) 式和 (2.2) 式暗含 $T(r,f(z))=S(r,f(z))$, 得到矛盾. 因此 $\Phi(z)\not\equiv C$.

我们进一步断言:

$$\frac{P'(f)f'}{P(f)}-\frac{\Phi'}{\Phi}\not\equiv 0.$$

如果断言不真, 则 $\frac{P'(f)f'}{P(f)}-\frac{\Phi'}{\Phi}\equiv 0$. 方程两边同时积分可得 $\Phi(z)=aP(f(z))$, 其中 a 是常数. 因此有 $(a-1)P(f(z))=f(z+c)-s(z)$.

若 $a=1$, 我们可以推导出 $T(r,f(z+c))=T(r,s(z))$. 这与定理的假设矛盾.

若 $a\neq 1$, 与定理证明中 $\Phi(z)\equiv C$ 情形下相同的原因, 我们可以得到矛盾. 因此断言成立.

通过简单的计算可以得到:

$$P(f)=\frac{\frac{\Phi'}{\Phi}[f(z+c)-s(z)]-[f(z+c)-s(z)]'}{\frac{P'(f)f'(z)}{P(f)}-\frac{\Phi'}{\Phi}}. \tag{2.3}$$

由于定理 1.11，引理 2.1 以及第一基本定理，我们可以推出：

$$T(r,P(f))=nT(r,f(z))=T(r,\frac{\frac{\Phi'}{\Phi}[f(z+c)-s(z)]-[f(z+c)-s(z)]'}{\frac{P'(f)f'(z)}{P(f)}-\frac{\Phi'}{\Phi}})$$

$$\leq m(r,f(z))+N(r,\frac{\Phi'}{\Phi}[f(z+c)-s(z)]-[f(z+c)-s(z)]')$$

$$+m(r,\frac{\Phi'}{\Phi}-\frac{[f(z+c)-s(z)]'}{[f(z+c)-s(z)]})+m(r,\frac{P'(f)f'(z)}{P(f)}-\frac{\Phi'}{\Phi})$$

$$+N(r,\frac{P'(f)f'(z)}{P(f)}-\frac{\Phi'}{\Phi})+S(r,f(z)). \tag{2.4}$$

接下来，我们将估计 $N(r,\frac{\Phi'}{\Phi}[f(z+c)-s(z)]-[f(z+c)-s(z)]')$ 以及 $N(r,\frac{P'(f)f'(z)}{P(f)}-\frac{\Phi'}{\Phi})$.

$\varphi_1(z)=\frac{\Phi'}{\Phi}[f(z+c)-s(z)]-[f(z+c)-s(z)]'$ 的极点是由 $\Phi(z)$ 的零点和 $P(f)$，$f(z+c)$，$s(z)$ 的极点组成. 根据假设，$N(r,s)=S(r,f)$. 若 z_0 是 $\Phi(z)$ 的零点或者 $P(f)$ 的极点，但不是 $f(z+c)$ 的极点，则 z_0 是 $\varphi_1(z)$ 的单极点；若 z_0 是 $P(f)$ 与 $f(z+c)$ 的公共极点且极点重数分别是 m 与 n, 则 z_0 是 $\varphi_1(z)$ 的极点，极点重数至多为 $n+1$；若 z_0 是 $f(z+c)$ 的极点但不是 $P(f)$ 的极点，由 (2.3) 式可得 z_0 是 $\varphi_1(z)$ 的单极点. 运用引理 2.4，我们得到：

$$N(r,\frac{\Phi'}{\Phi}[f(z+c)-s(z)]-[f(z+c)-s(z)]')$$

$$\leq\overline{N}(r,\frac{1}{\Phi(z)})+\overline{N}(r,P(f))+N(r,f(z+c))+S(r,f(z)) \tag{2.5}$$

$$=\overline{N}(r,\frac{1}{\Phi(z)})+\overline{N}(r,f(z))+N(r,f(z))+S(r,f(z)).$$

相同的原因，我们忽略 $s(z)$ 的极点. 函数 $\Phi(z)$，$P(f(z))$ 的零点以及 $P(f(z))$ 和 $f(z+c)$ 的极点组成了 $\varphi_2(z)=\frac{P'(f)f'(z)}{P(f)}-\frac{\Phi'}{\Phi}$ 的零点. 若 z_0 是 $\Phi(z)$ 的零点，$P(f(z))$ 的零点或者是 $f(z+c)$ 的极点，则 z_0 是 $\varphi_2(z)$ 的单极点；若 z_0 是

$P(f(z))$ 的极点但不是 $f(z+c)$ 的极点，由 Laurent 级数，我们得到 $\varphi_2(z)$ 在点 z_0 处解析. 因此，我们推导出：

$$N(r,\frac{P'(f)f'(z)}{P(f)}-\frac{\Phi'}{\Phi})\leq\overline{N}(r,\frac{1}{\Phi(z)})+\overline{N}(r,\frac{1}{P(f)})+\overline{N}(r,f(z+c))+S(r,f(z))$$

$$=\overline{N}(r,\frac{1}{\Phi(z)})+\sum_{i=1}^{m}\overline{N}(r,\frac{1}{f(z)-a_i})+\overline{N}(r,f(z))+S(r,f(z)),\tag{2.6}$$

其中 $a_1,a_2,\ldots a_m$ 为方程 $P(z)=0$ 的解.

联立 (2.4)，(2.5) 以及 (2.6) 得到：

$$nT(r,f(z))\leq 2m(r,\frac{\Phi'}{\Phi})+m(r,f(z))+m(r,\frac{f'(z+c)}{f(z+c)})+\sum_{i=1}^{m}\overline{N}(r,\frac{1}{f(z)-a_i})$$

$$+2\overline{N}(r,\frac{1}{\Phi(z)})+2\overline{N}(r,f(z))+N(r,f(z))+S(r,f(z)).\tag{2.7}$$

从 (2.2) 式和引理 2.1，我们推出 $T(r,\Phi(z))=O(T(r,f(z))$. 因此我们有：

$$m(r,\frac{f'(z+c)}{f(z+c)})=S(r,f(z)),\quad m(r,\frac{\Phi'}{\Phi})=S(r,\Phi(z))=S(r,f(z)).\tag{2.8}$$

根据 (2.8) 式以及第一基本定理，我们可以简化 (2.7) 式得到：

$$(n-m)T(r,f(z))\leq 3T(r,f(z))+2\overline{N}(r,\frac{1}{\Phi(z)})+S(r,f(z)).\tag{2.9}$$

由 $\deg(P(z))-\overline{N}(r,\frac{1}{P(z)})=n-m>3$ 进一步推出：

$$T(r,f(z))\leq C\overline{N}(r,\frac{1}{P(f)+f(z+c)-s(z)})+S(r,f(z)),$$

其中 C 为正数.

如果 $P(f)+f(z+c)-s(z)$ 没有零点，则 $T(r,f(z))=S(r,f(z))$，得到矛盾. 因此，$P(f)+f(z+c)-s(z)$ 至少有一个零点.

当 f 超越时，同理可得 $P(f)+f(z+c)-s(z)$ 有无穷多个零点． □

§2.4 定理 2.2 的证明

我们记 $\Phi(z)=P(f)+f(z+c)-f(z)-s(z)$，可以断言：$\Phi(z)\not\equiv C$. 如果断言不成立，运用与定理 2.1 相同的讨论可以得到：

$$T(r,P(f))=nT(r,f)=T(r,f(z+c))+T(r,f(z))+S(r,f). \tag{2.10}$$

(2.2) 式与 (2.10) 式暗含 $nT(r,f(z))=2T(r,f(z))+S(r,f(z))$，由于 $n>4$，则我们得到矛盾，因此 $\Phi(z)\not\equiv C$.

假设 $\dfrac{P'(f)f'}{P(f)}-\dfrac{\Phi'}{\Phi}\equiv 0$. 通过两边积分可以得到 $\Phi(z)=aP(f(z))$，其中 a 为常数，因此 $(a-1)P(f(z))=f(z+c)-f(z)-s(z)$.

若 $a=1$，我们可以推得 $T(r,f(z+c)-f(z))=T(r,s(z))$，与定理的假设中函数 $f(z)$ 为超越亚纯函数矛盾．

若 $a\neq 1$，根据与情形 $\Phi(z)\equiv C$ 相同的原因，得到矛盾．

因此

$$\frac{P'(f)f'}{P(f)}-\frac{\Phi'}{\Phi}\not\equiv 0.$$

同样的计算方法可以得到：

$$P(f)=\frac{\dfrac{\Phi'}{\Phi}[f(z+c)-f(z)-s(z)]-[f(z+c)-f(z)-s(z)]'}{\dfrac{P'(f)f'(z)}{P(f)}-\dfrac{\Phi'}{\Phi}}. \tag{2.11}$$

应用定理 1.11，引理 2.1 以及第一基本定理，我们可以推出：

$$T(r,P(f))=nT(r,f(z))$$

$$= T(r, \frac{\frac{\Phi'}{\Phi}[f(z+c)-f(z)-s(z)]-[f(z+c)-f(z)-s(z)]'}{\frac{P'(f)f'(z)}{P(f)}-\frac{\Phi'}{\Phi}})$$

$$\le m(r, f(z)) + N(r, \frac{\Phi'}{\Phi}[f(z+c)-f(z)-s(z)]$$

$$-[f(z+c)-f(z)-s(z)]') + m(r, \frac{\Phi'}{\Phi} - \frac{[f(z+c)-f(z)-s(z)]'}{[f(z+c)-f(z)-s(z)]})$$

$$+m(r, \frac{P'(f)f'(z)}{P(f)}-\frac{\Phi'}{\Phi}) + N(r, \frac{P'(f)f'(z)}{P(f)}-\frac{\Phi'}{\Phi}) + S(r, f(z)). \tag{2.12}$$

接下来，我们将估计 $N(r, \frac{\Phi'}{\Phi}[f(z+c)-f(z)-s(z)]-[f(z+c)-f(z)-s(z)]')$ 以及 $N(r, \frac{P'(f)f'(z)}{P(f)}-\frac{\Phi'}{\Phi})$.

$\varphi_1(z) = \frac{\Phi'}{\Phi}[f(z+c)-f(z)-s(z)]-[f(z+c)-f(z)-s(z)]'$ 的极点是由 $\Phi(z)$ 的零点和 $P(f)$，$f(z+c)-f(z)$，$s(z)$ 的极点组成. 根据假设，$N(r,S) = S(r,f)$. 若 z_0 是 $\Phi(z)$ 的零点或者 $P(f)$ 的极点，但不是 $f(z+c)-f(z)$ 的极点，则 z_0 是 $\varphi_1(z)$ 的单极点；若 z_0 是 $P(f)$ 与 $f(z+c)-f(z)$ 的公共极点且极点重数分别是 m 与 n，则 z_0 是 $\varphi_1(z)$ 的极点，极点重数至多为 $n+1$；若 z_0 是 $f(z+c)-f(z)$ 的极点但不是 $P(f)$ 的极点，由 (2.11) 式可得 z_0 是 $\varphi_1(z)$ 的单极点. 运用引理 2.4，我们得到：

$$N(r, \frac{\Phi'}{\Phi}[f(z+c)-f(z)-s(z)]-[f(z+c)-f(z)-s(z)]')$$

$$\le \overline{N}(r, \frac{1}{\Phi(z)}) + \overline{N}(r, P(f)) + N(r, f(z+c)-f(z)) + S(r, f(z)) \tag{2.13}$$

$$= \overline{N}(r, \frac{1}{\Phi(z)}) + \overline{N}(r, f(z)) + 2N(r, f(z)) + S(r, f(z)).$$

相同的原因，我们忽略 $s(z)$ 的极点. 函数 $\Phi(z)$，$P(f(z))$ 的零点以及 $P(f(z))$ 和 $f(z+c)-f(z)$ 的极点组成了 $\varphi_2(z) = \frac{P'(f)f'(z)}{P(f)}-\frac{\Phi'}{\Phi}$ 的零点. 若 z_0 是 $\Phi(z)$ 的零点，$P(f(z))$ 的零点或者是 $f(z+c)-f(z)$ 的极点，则 z_0 是 $\varphi_2(z)$ 的单极

点；若 z_0 是 $P(f(z))$ 的极点但不是 $f(z+c)-f(z)$ 的极点，由 Laurent 级数，我们得到 $\varphi_2(z)$ 在点 z_0 处解析. 因此，我们推导出：

$$N(r, \frac{P'(f)f'(z)}{P(f)} - \frac{\Phi'}{\Phi})$$

$$\leq \overline{N}(r, \frac{1}{\Phi(z)}) + \overline{N}(r, \frac{1}{P(f)}) + \overline{N}(r, f(z+c)-f(z)) + S(r, f(z)) \qquad (2.14)$$

$$= \overline{N}(r, \frac{1}{\Phi(z)}) + \sum_{i=1}^{m} \overline{N}(r, \frac{1}{f(z)-a_i}) + \overline{N}(r, f(z)) + S(r, f(z)),$$

其中 $a_1, a_2, \ldots a_m$ 为方程 $P(z)=0$ 的解.

联立 (2.12), (2.13) 以及 (2.14) 得到：

$$nT(r, f(z)) \leq 2m(r, \frac{\Phi'}{\Phi}) + 2m(r, f(z)) + m(r, \frac{f'(z+c)}{f(z+c)}) + 2\overline{N}(r, \frac{1}{\Phi(z)})$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \overline{N}(r, \frac{1}{f(z)-a_i}) + 2\overline{N}(r, f(z)) + 2N(r, f(z)) + S(r, f(z)). \qquad (2.15)$$

从 (2.10) 式和引理 2.1, 我们推出 $T(r, \Phi(z)) = O(T(r, f(z))$. 因此我们有：

$$m(r, \frac{f'(z+c)}{f(z+c)}) = S(r, f(z)), \quad m(r, \frac{\Phi'}{\Phi}) = S(r, \Phi(z)) = S(r, f(z)).$$

根据上式以及第一基本定理，我们可以简化 (2.15) 式得到：

$$(n-m)T(r, f(z)) \leq 4T(r, f(z)) + 2\overline{N}(r, \frac{1}{\Phi(z)}) + S(r, f(z)). \qquad (2.16)$$

由 $\deg(P(z)) - \overline{N}(r, \frac{1}{P(z)}) = n - m > 4$ 进一步推出：

$$T(r, f(z)) \leq C\overline{N}(r, \frac{1}{P(f)+f(z+c)-s(z)}) + S(r, f(z)).$$

如果 $P(f)+f(z+c)-s(z)$ 没有零点，则 $T(r, f(z)) = S(r, f(z))$, 得到矛盾. 因此，$P(f)+f(z+c)-s(z)$ 至少有一个零点.

当 f 超越时，同理可得 $P(f)+f(z+c)-s(z)$ 有无穷多个零点. □

§2.5 定理 2.5 的证明

我们记 $\Phi(z)=P(f(z))+f(qz)-s(z)$. 明显地，$\Phi(z)\not\equiv C$. 如果结论不成立，则 $P(f)\equiv f(qz)-s(z)+C$, 因此我们有：

$$T(r,P(f))=nT(r,f)=T(r,f(qz))+S(r,f), \tag{2.17}$$

其中 $n=deg(P)>3$. 应用引理 2.2 以及引理 2.3, 可以推导出：

$$\begin{aligned}T(r,f(qz))&=m(r,f(qz))+N(r,f(qz))=m(r,f(z))+m(r,\frac{f(qz)}{f(z)})\\&+N(r,f(z))+S(r,f(z))=T(r,f(z))+S(r,f(z)).\end{aligned} \tag{2.18}$$

而 (2.17) 式和 (2.18) 式暗含 $T(r,f(z))=S(r,f(z))$, 得到矛盾. 因此 $\Phi(z)\not\equiv C$.

我们进一步断言：

$$\frac{P'(f)f'}{P(f)}-\frac{\Phi'}{\Phi}\not\equiv 0.$$

与定理 2.1 的讨论中相同的原因，我们可以得到矛盾.

因此断言成立. 同理，可以得到：

$$P(f)=\frac{\frac{\Phi'}{\Phi}[f(qz)-s(z)]-[f(qz)-s(z)]'}{\frac{P'(f)f'(z)}{P(f)}-\frac{\Phi'}{\Phi}}. \tag{2.19}$$

进一步可以推导得到：

$$\begin{aligned}T(r,P(f))&=nT(r,f(z))=T(r,\frac{\frac{\Phi'}{\Phi}[f(qz)-s(z)]-[f(qz)-s(z)]'}{\frac{P'(f)f'(z)}{P(f)}-\frac{\Phi'}{\Phi}})\\&\le m(r,f(z))+N(r,\frac{\Phi'}{\Phi}[f(qz)-s(z)]-[f(qz)-s(z)]')\\&+m(r,\frac{\Phi'}{\Phi}-\frac{[f(qz)-s(z)]'}{[f(qz)-s(z)]})+m(r,\frac{P'(f)f'(z)}{P(f)}-\frac{\Phi'}{\Phi})\\&+N(r,\frac{P'(f)f'(z)}{P(f)}-\frac{\Phi'}{\Phi})+S(r,f(z)).\end{aligned} \tag{2.20}$$

使用定理 2.1 中的方法，做适当的变换可以推出：

$$nT(r,f(z)) \leq 2m(r,\frac{\Phi'}{\Phi}) + m(r,f(z)) + m(r,\frac{f'(qz)}{f(qz)}) + \sum_{i=1}^{m}\overline{N}(r,\frac{1}{f(z)-a_i})$$

$$+2\overline{N}(r,\frac{1}{\Phi(z)}) + \overline{N}(r,f(z)) + \overline{N}(r,f(qz)) + N(r,f(qz)) + S(r,f(z)).$$

由引理 2.3 以及第一基本定理，我们推出：

$$(n-m-3)T(r,f(z)) \leq 2\overline{N}(r,\frac{1}{\Phi(z)}) + S(r,f(z)).$$

因此，$P(f(z))+f(qz)-s(z)$ 至少有一个零点；特点地，当 $f(z)$ 为超越亚纯函数时 $P(f(z))+f(qz)-s(z)$ 有无穷多个零点． □

§2.6 问题与展望

正如前面提到的一样，由于 Hayman 定理在 Nevanlinna 值分布理论中的重要地位，Hayman 定理的差分对应形式的研究也是差分值分布理论的热点问题．在整函数情形下，Hayman 定理和 Hayman 定理的差分对应形式都要求条件为 $n\geq 3$．而在亚纯函数情形下，Hayman 定理的条件要求 $n\geq 5$，但之前的结果中条件是 $n\geq 8$，我们的结果也要求在 $n\geq 6$ 时，结论才成立．所以，我们可以提出问题：

问题. 假设 f 是一个有穷级超越亚纯函数，a 是有穷复数．若 $n=5$，则差分多项式 $f^n(z)+f(z+c)-f(z)$ 是否取 a 无穷多次．

在证明方法上，我们运用亚纯函数唯一性问题中经典的构造函数以及分析零点和极点的方法建立了关于特征函数的一个不等式，从而证明了我们的结果．其突破之处在于建立了相对精确的涉及差分形式特征函数的不等式，所以我认为在解决上述给出的问题时，就要求建立更为准确的不等式完成证明．

第三章　涉及分担值的亚纯函数正规族的研究

Schwick 首先将分担值思想引入到正规族的研究中，分担思想的引入推进了正规族的研究，丰富了正规定则，后来国内外众多学者如：Zalcman 、顾永兴、庞学诚、方明亮等都对这个领域进行了深入的研究. 本章考虑涉及分担值的亚纯函数正规族问题，将雷春林和方明亮的定理条件中一阶导函数的微分多项式分担值推广到高阶微分多项式分担函数值的情形，从而得到了本章的两个主要定理. 定理的证明采用反证法，运用 Pang-Zalcman 引理， Hurwitz 定理以及一些值分布问题的结论得到矛盾，继而完成定理的证明. 本章的结构安排如下：第一节是引言及主要结果，主要介绍研究问题的背景，基本的符号以及基本的结果，在此基础上，我们给出了本章的主要的定理和它们的直接推论. 第二节是主要引理，我们主要列出了定理证明中需要的引理，包括著名的 Pang-Zalcman 引理. 最后一部分是定理的证明，为了叙述的需要，我们先给出定理 3.3 的证明再给出定理 3.1 的证明.

§3.1　引言及主要结果

假设 $D \in \mathbb{C}$ 且 $\mathscr{F}$ 是 D 上的一个亚纯函数族. 函数族 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规，如果对于任意的 $\{f_n\} \subset \mathscr{F}$ 都存在子列 $\{f_{n_j}\}$ 在 D 内内闭一致收敛到一亚纯函数或者 ∞ ([23], [50], [59]).

假设 $f(z)$, $g(z)$ 是 D 上的亚纯函数，且 $a \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. 若 $f-a$ 和 $g-a$ 有相同的零点 (不计重数)，则称 f 和 g IM 分担 a. 记为：$f(z)=a \Leftrightarrow g(z)=a$; 若 $f-a$ 和 $g-a$ 有相同的零点 (计重数)，则称 f 和 g CM 分担 a. 记为：$f(z)=a \rightleftharpoons g(z)=a$ ([61]).

定义 3.1. 设 $D \subseteq \mathbb{C}$, 且 $m, l_1, l_2, \cdots, l_m$ 为非负整数满足 $0 \le l_i \le k$. 记

$$M(f, f', \cdots, f^{(k)}) = a(z) \prod_{i=1}^{m} f^{(l_i)},$$

其中 f 与 a 分别为 D 上的亚纯和全纯函数 ($a \not\equiv 0$), 则 $M(f, f', \cdots, f^{(k)})$ 称为 f 的微分单项式. 微分单项式的度数 $\deg(M) := m$, 权 $w(M) := \sum_{i=1}^{m}(1 + l_i)$.

微分多项式是微分单项式 M_j 的和, 记为 $H := M_1 + \cdots + M_n$. 微分多项式的度数和权分别为: $\deg(H) := \max\{\deg(M_1), \cdots, \deg(M_n)\}$ 和 $w(H) := \max\{w(M_1), \cdots, w(M_n)\}$).

此外, 我们记

$$\frac{w}{\deg}|_H = \max\left\{\frac{w(M_1)}{\deg(M_1)}, \frac{w(M_2)}{\deg(M_2)}, \cdots, \frac{w(M_n)}{\deg(M_n)}\right\},$$

k 次微分多项式记为:

$$G(f) = f^{(k)} + H(f, f', \cdots, f^{(k)}).$$

1959 年, W. K. Hayman [24] 提出:

猜想 3A. 假设 f 是一个超越亚纯函数, 则对任意正整数 n, $f^n f'$ 取每一个有穷非零复数无穷多次.

当 f 为整函数时, W. K. Hayman [24, 25] 证明了在 $n \geq 3$ 以及 $n \geq 2$ 的情形下猜想成立. 此外, 许多学者亦展开研究, 并最终证明了猜想 A. Mues [41] 证明了 $n \geq 2$ 时上述猜想成立; 而 Clunie [12] 讨论了当 $n \geq 1$ 且 f 是整函数时的情况; Bergweiler 和 Eremenko [3] 随后论证了 $n = 1$ 且 f 是有穷级的情况; 最终陈怀惠和方明亮 [8] 证明了 $n = 1$ 时猜想成立.

相应于 Hayman [25] 猜想, 存在关于函数族正规的猜想 (见 [2]).

猜想 3B. 假设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 内的亚纯函数族. 若对于任意的 $f \in \mathscr{F}$ 在 D 内满足 $f^n f' \neq a$, 其中 n 是一正整数 a 是一有穷复数, 则 $\mathscr{F}$ 在区域 D 内正规.

在全纯函数情形下, 杨乐和张广厚 [62] 证明了猜想 3B; 顾永兴 [15] 证实了 $n = 3$, 4 时结论成立; Oshkin [42] 讨论了当 $n = 1$ 且 $\mathscr{F}$ 为全纯函数族的情形; $n \geq 2$ 的情况被庞学诚 [43] 证明; 随后陈怀惠和方明亮 [8] 完全解决了猜想 3B. Schick [52] 首次将函数分担值与正规族联系起来. 许多学者更进一步研究了这类正规定则, 如: 孟超 [6]; 雷春林和方明亮 [33]; 李运通和顾永兴 [34]; 庞学诚和 Zalcman [44]; 夏吉英和徐焱 [57].

在 2004 年，方明亮和 Zalcman [14] 证明了：

定理 3C. 假设 $\mathscr{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族，且 $n \geq 1$ 为正整数，b 是有穷非零复数．若对任意的 $f, g \in \mathscr{F}$ 都满足 f 和 g 在 D 内 IM 分担 0，$f^n f'$ 和 $g^n g'$ 在 D 内 IM 分担 b，则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规．

后来，张庆彩 [64] 得到下面的结论：

定理 3D. 假设 $\mathscr{F}$ 是区域 D 内的全纯函数族，且 $n \geq 1$ 为正整数，b 是有穷复数．若对任意的 $f, g \in \mathscr{F}$ 都满足 $f^n(f-1)f'$ 和 $g^n(g-1)g'$ 在 D 内 CM 分担 b，则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规．

2008 年，张庆彩 [65] 又证明了如下的定理：

定理 3E. 假设 $\mathscr{F}$ 是区域 D 内的全纯函数族，且 $n \geq 2$ 为正整数，b 是有穷非零复数．若对任意的 $f, g \in \mathscr{F}$ 都满足 $f^n f'$ 和 $g^n g'$ 在 D 内 IM 分担 b，则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规．

定理 3E 在 $n = 1$ 时不成立．最近，雷春林和方明亮 [32] 推广了定理 2C 和 2D，得到了：

定理 3F. 假设 $\mathscr{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族，P 是多项式且满足 $\deg(P) \geq 3$ 或者 $\deg(P) = 2$ 时多项式 P 仅有一个零点．若对任意的 $f, g \in \mathscr{F}$ 都满足 $P(f)f'$ 和 $P(g)g'$ 在 D 内 IM 分担非零常数 b，则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规．

定理 3G. 假设 $\mathscr{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族且满足所有函数的极点都是重极点，P 是多项式且有两个不同的零点．若对任意的 $f, g \in \mathscr{F}$ 都满足 $P(f)f'$ 和 $P(g)g'$ 在 D 内 IM 分担非零常数 b，则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规．

在本章中，我们进一步推广了定理 3F 和定理 3G，得到了下面两个定理．

定理 3.1. 假设 k 是一个正整数，$\mathscr{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族且所有函数的零点重数都不小于 k，令 $P = a_p z^p + \cdots + a_2 z^2 + z$ 是一多项式且满足 $a_p, a_2 \neq 0$；$p = \deg(P) \geq k + 2$．若对任意的 $f, g \in \mathscr{F}$ 都有 $P(f)G(f)$ 和 $P(g)G(g)$ 在 D 内 IM 分担非零常数 b，其中 $G(f) = f^{(k)} + H(f)$ 是满足条件 $\frac{w}{\deg}|_H \leq \frac{k}{l+1} + 1$ 或者 $w(H) - \deg(H) < k$ 的微分多项式．则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规．

标注 3.1. 若上述定理中 $P(z)$ 仅有一个零点且 $\deg(P) \geq k+1$，定理 2.1 依然成立.

推论 3.2. 假设 k 是一个正整数，$\mathscr{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族且所有函数的零点重数都不小于 k, 令 $P = a_p z^p + \cdots + a_2 z^2 + z$ 是一多项式且满足 $a_p, a_2 \neq 0$ ；$p = \deg(P) \geq k+2$. 若对任意的 $f, g \in \mathscr{F}$ 都有 $P(f)f^{(k)}$ 和 $P(g)g^{(k)}$ 在 D 内 IM 分担非零常数 b, 则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

定理 3.3. 假设 k 是一个正整数，$\mathscr{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族且所有函数的零点与极点的重数分别大于等于 k 和 2, 令 $P(z)$ 是一至少具有两个不同零点的多项式. 若对任意的 $f, g \in \mathscr{F}$ 都有 $P(f)G(f)$ 和 $P(g)G(g)$ 在 D 内 IM 分担常数 b, 其中 $G(f) = f^{(k)} + H(f)$ 是满足条件 $w(H) - \deg(H) < k$ 的微分多项式. 则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

推论 3.4. 假设 k 是一个正整数，$\mathscr{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族且满足所有函数的零点与极点的重数分别大于等于 k 和 2, 令 $P(z)$ 是一至少具有两个不同零点的多项式. 若对任意的 $f, g \in \mathscr{F}$ 都有 $P(f)f^{(k)}$ 和 $P(g)g^{(k)}$ 在 D 内 IM 分担常数 b, 则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

§3.2 主要引理

为了定理的证明，我们需要下列引理：

引理 3.1. [Zalcman 引理] ([7], [45]) 假设 k 是一正整数，$\mathscr{F}$ 是单位圆盘 $\triangle$ 内的一个亚纯函数族，且对任意的 $f \in \mathscr{F}$ 有 f 的零点重级至少为 k. 当 $f = 0$ 时，存在实数 $A \geq 1$ 使得 $|f^{(k)}(z)| \leq A$. 若 $\mathscr{F}$ 在 z_0 点不正规，则对任意的 $\alpha \in [0, k]$，存在

a). 点列 $z_n \in \triangle$，$z_n \to z_0$；

b). 函数列 $f_n \in \mathscr{F}$；

c). 正整数列 $\rho_n \to 0^+$，使得 $\rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n \xi) = g_n(\xi)$ 按球面距内闭一致收敛到 $g(\xi)$，其中 $g(\xi)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数，所有的零点重数至少为 k，且 $g^\sharp(\xi) \leq g^\sharp(0) = kA + 1$，$\rho(g) \leq 2$.

引理 3.2.([66]) 假设 $n \geq 2$, k 为正整数，若 f 是超越亚纯函数，则 $f^n f^{(k)}$

取每一个有穷非零复数无穷多次；若 f 是非常数有理函数，则 $f^nf^{(k)}$ 取每一个非零有穷复数至少一次．

引理 3.3.([32]) 假设 k 为正整数且 b 是非零有穷复数，如果 f 是非常数有理函数，则 $f^kf'-b$ 至少有两个判别的零点．

引理 3.4. 假设 n，k 为正整数满足 $n\geq k+1$，b 是有穷复数．若 f 是非常数有理函数且所有零点重数至少为 k，则 $f^nf^{(k)}-b$ 至少有两个不同的零点．

证明. 运用反证法，即假设结论不成立，则 $f^nf^{(k)}-b$ 至多存在一个零点．根据引理 3.2 可得 $f^nf^{(k)}-b$ 存在一个零点．

若 f 是非常数多项式，我们可得

$$f^nf^{(k)}(z)=A(z-z_0)^l+b, \tag{3.1}$$

其中 A 为非零常数且 $l\geq 2$ 为正整数．

等式 (3.1) 右边仅有单零点，而左边都是重零点，矛盾．因此 f 是非多项式的有理函数．下面我们区分两种情况：

情况 1. 当 $k\geq 2$ 时，令

$$f(z)=A\frac{(z-\alpha_1)^{m_1}(z-\alpha_2)^{m_2}\cdots(z-\alpha_s)^{m_s}}{(z-\beta_1)^{n_1}(z-\beta_2)^{n_2}\cdots(z-\beta_t)^{n_t}}. \tag{3.2}$$

上式中 A 是非零整数．由于 f 的零点至少是 k，我们得到 $m_i\geq k(i=1,2,\cdots,s)$，$n_j\geq 1(j=1,2,\cdots,t)$．因此

$$m_1+m_2+\cdots+m_s\geq ks, \tag{3.3}$$

$$n_1+n_2+\cdots+n_t\geq t. \tag{3.4}$$

由 (3.2) 式，可得：

$$f^{(k)}(z)=\frac{(z-\alpha_1)^{m_1-k}(z-\alpha_2)^{m_2-k}\cdots(z-\alpha_s)^{m_s-k}g(z)}{(z-\beta_1)^{n_1+k}(z-\beta_2)^{n_2+k}\cdots(z-\beta_t)^{n_t+k}}. \tag{3.5}$$

其中 g 是多项式且次数至少为 $k(s+t-1)$．

联立 (3.2) 式和 (3.5) 式，我们有：

$$f^nf^{(k)}(z)=\frac{A^n(z-\alpha_1)^{M_1}(z-\alpha_2)^{M_2}\cdots(z-\alpha_s)^{M_s}g(z)}{(z-\beta_1)^{N_1}(z-\beta_2)^{N_2}\cdots(z-\beta_t)^{N_t}}=\frac{P}{Q}. \tag{3.6}$$

其中 P 和 Q 是次数分别为 M 和 N 的多项式且 P 与 Q 无公共因子； $M_i = (n+1)m_i-k$; $N_j = (n+1)n_j+k$. 从 (3.3) 式和 (3.4) 式可得到 $M_i = (n+1)m_i-k \geq k(n+1)-k = nk$, $N_j = (n+1)n_j+k \geq n+k+1$. 因此

$$\deg(P) = M = \sum_{i=1}^{s} M_i + \deg(g) \geq nks, \tag{3.7}$$

$$\deg(Q) = N = \sum_{j=1}^{t} N_j \geq (n+k+1)t. \tag{3.8}$$

既然 $f^n f^{(k)} - a = 0$ 仅有一个零点 z_0, 根据 (3.6) 可以推出

$$f^n f^{(k)}(z) = a + \frac{B(z-z_0)^l}{(z-\beta_1)^{N_1}(z-\beta_2)^{N_2}\cdots(z-\beta_t)^{N_t}} = \frac{P}{Q}. \tag{3.9}$$

注意到 $a \neq 0$, 可得出 $z_0 \neq \alpha_i (i=1,\cdots,s)$, 其中 B 是非零常数.

由 (3.6) 式推出:

$$[f^n f^{(k)}(z)]' = \frac{(z-\alpha_1)^{M_1-1}(z-\alpha_2)^{M_2-1}\cdots(z-\alpha_s)^{M_s-1}g_1(\xi)}{(z-\beta_1)^{N_1+1}\cdots(z-\beta_t)^{N_t+1}}. \tag{3.10}$$

$g_1(\xi)$ 为次数至多为 $(k+1)(s+t-1)$ 的多项式.

由 (3.9) 式可有:

$$[f^n f^{(k)}(z)]' = \frac{(z-z_0)^{l-1}g_2(z)}{(z-\beta_1)^{N_1+1}\cdots+(z-\beta_t)^{N_t+1}}. \tag{3.11}$$

上式中 $g_2(\xi) = B(l-N)z^t + B_1 z^{t-1}\cdots + B_t$ 是一个多项式 ($B_1, \cdots, B_t$ 为常数).

下面分情况讨论

情况 1.1. 如果 $l \neq N$, 根据 (3.9) 可推出 $\deg(P) \geq \deg(Q)$, 即 $M \geq N$. 联立 (3.10) 式和 (3.11) 式不难推出 $\sum_{i=1}^{s}(M_i-1) \leq \deg(g_2) = t$, 因此 $M-s-\deg(g) \leq t$; $M \leq s+t+\deg(g) \leq (k+1)(s+t)-k < (k+1)(s+t)$. 从 (3.6) 和 (3.7) 进一步推出

$$M < (k+1)(s+t) \leq (k+1)[\frac{M}{nk} + \frac{N}{n+k+1}]$$

$$\le (k+1)[\frac{1}{nk}+\frac{1}{n+k+1}]M.$$

因为 $n \ge k+1$, 则有 $M < M$. 这是一个矛盾.

情况 1.2. 如果 $l = N$, 分两种情况讨论

情况 1.2.1. 当 $M \ge N$ 时, 联立 (3.10) 式与 (3.11) 式即得 $\sum_{i=1}^{s}(M_i - 1) \le \deg(g_2) = t$. 所以有 $M - s - \deg(g) \le t$ 和 $M \le s + t + \deg(g) \le (k+1)(s+t) - k < (k+1)(s+t)$ 成立, 与情况 1.1 相同的原因得到矛盾.

情况 1.2.2. 当 $M < N$ 时, 从 (3.10) 式和 (3.11) 式容易推出 $l - 1 \le \deg g_1 \le (s+t-1)(k+1)$, 则

$$N = l \le \deg(g_1) + 1 \le (k+1)(s+t) - k < (k+1)(s+t)$$

$$\le (k+1)[\frac{1}{nk+k}+\frac{1}{n+k+1}]N \le N.$$

因为 $n \ge k+1$, 所以 $N < N$, 矛盾.

情况 2. 如果 $k = 1$, 则引理 3.3 即是所要证明的结论. □

引理 3.5.([61]) 假设 $f(z)$ 为非常数的有理函数, 则 $f(z)$ 仅有一个亏值.

§3.3 定理 3.3 的证明

为了证明叙述方便, 我们先证明定理 3.3, 然后再证明定理 3.1.

定理 3.3 的证明 不失一般性, 令 $P(z) = Q(z)z(z-1)$, $Q(z) \not\equiv 0$ 是多项式. 假设 $\mathscr{F}$ 在 D 上不正规, 则存在一点 z_0 使得 $\mathscr{F}$ 在 z_0 点不正规, 不妨设 $z_0 = 0$. 由于引理 3.1, 存在点列 $z_j \to 0$; 数列 $\rho_j \to 0^+$ 以及函数 $f_j \in \mathscr{F}$ 使得

$$g_j(\xi) = f_j(z_j + \rho_j\xi) \to g(\xi), \tag{3.12}$$

依球面距内闭一致收敛, 函数 g 是 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数, 其零点与极点重数分别大于等于 k 和 2.

如果 $Q(g)g(g-1)g^{(k)}\equiv 0$，则可得 g 是常数，矛盾.

如果 $Q(g)g(g-1)g^{(k)}\neq 0$. 由于 g 的零点重数至少为 k，所以 $g\neq 0,1$.

我们断言 g 不是超越亚纯函数. 如果断言不成立，则有

$$\begin{aligned}T(r,g)&\leq \overline{N}(r,g)+\overline{N}(r,\frac{1}{g})+\overline{N}(r,\frac{1}{g-1})+S(r,g)\\&\leq \frac{1}{2}N(r,g)+S(r,g)\\&\leq \frac{1}{2}T(r,g)+S(r,g)\end{aligned}$$

所以推得 $T(r,g)=S(r,g)$，矛盾. 因此 g 为有理函数. 既然 $g\neq 0,1$，则 g 为常函数，与引理 3.1 矛盾.

因此 $Q(g)g(g-1)g^{(k)}$ 是非常数亚纯函数且至少有一个零点.

下面我们将证明 $Q(g)g(g-1)g^{(k)}$ 仅有一个零点. 运用反证法，设 ξ_0 和 ξ_0^* 是 $Q(g)g(g-1)g^{(k)}$ 的两个不同的零点. 我们可选择足够小的正数 δ 使得 g 与 g_j 在 $D(\xi_0,\delta_1)$ 与 $D(\xi_0^*,\delta_1)$ 上全纯，且满足 $D(\xi_0,\delta_1)\cap D(\xi_0^*,\delta_1)=\emptyset$.

从 (3.12) 式可得

$$\begin{aligned}&\rho_j^k[Q(f_j(z_j+\rho_j\xi)f_j(z_j+\rho_j\xi)(f_j(z_j+\rho_j\xi)-1)\cdot G(f_j(z_j+\rho_j\xi)-b]\\&=\rho_j^k[Q(g_j(\xi)g_j(\xi)(g_j(\xi)-1)\cdot(\rho_j^{-k}g_j^{(k)}(\xi)+\sum_{j=1}^{n}a_j^*\rho_j^{\deg(M_j)-w(M_j)}\\&M_i(g,g',\cdots,g^{(k)}))-b]\to Q(g(\xi))g(\xi)(g(\xi)-1)g^{(k)}(\xi).\end{aligned}\tag{3.13}$$

由 Hurwitz 定理，存在点列 $\xi_j\in D(\xi_0,\delta)$; $\xi_j^*\in D(\xi_0^*,\delta)$ 使得对足够大的 j 有

$$Q(f_j(z_j+\rho_j\xi_j))f_j(z_j+\rho_j\xi_j)(f_j(z_j+\rho_j\xi_j)-1)G(f_j(z_j+\rho_j\xi_j))=b,$$
$$Q(f_j(z_j+\rho_j\xi_j^*))f_j(z_j+\rho_j\xi_j^*)(f_j(z_j+\rho_j\xi_j^*)-1)G(f_j(z_j+\rho_j\xi_j^*))=b.$$

根据定理的假设：对任意的 $f,g\in\mathscr{F}$ 有 $P(f)G(f)$ 和 $P(g)G(g)$ 在 D 内 IM 分担 0，推导出对任给的 m 有：

$$Q(f_m(z_j+\rho_j\xi_j))f_m(z_j+\rho_j\xi_j)(f_m(z_j+\rho_j\xi_j)-1)G(f_m(z_j+\rho_j\xi_j)=b,$$

$$Q(f_m(z_j+\rho_j\xi_j^*))f_m(z_j+\rho_j\xi_j^*)(f_m(z_j+\rho_j\xi_j^*)-1)G(f_m(z_j+\rho_0^*\xi_j)=b.$$

固定正整数 m，取 $j\to\infty$ 且注意到 $z_j+\rho_j\xi_j\to 0$；$z_j+\rho_j\xi_j^*\to 0$ 可推出：

$$Q(f_m(0))f_m(0)(f_m(0)-1)G(f_m(0))=b.$$

既然 $P(f_m)G(f_m)-b$ 的零点组成的集合中不存在聚点，则 $z_j+\rho_j\xi_j=0$；$z_j+\rho_j\xi_j^*=0$.

因此

$$\xi_j=-\frac{z_j}{\rho_j},\qquad \xi_j^*=-\frac{z_j}{\rho_j}.$$

这与 $\xi_j\in D(\xi_0,\delta)$；$\xi_j^*\in D(\xi_0^*,\delta)$；$D(\xi_0,\delta)\cap D(\xi_0^*,\delta)=\emptyset$ 矛盾，所以 $Q(g)g(g-1)g^{(k)}$ 仅有一个孤立零点记为 ξ_0.

如果 g 是一个超越亚纯函数. 考虑到 $Q(g)g(g-1)g^{(k)}$ 仅有一个零点，则 $g=0$，$g=1$ 仅有有穷多个零点，因此可得 $T(r,g)=S(r,g)$，矛盾.

所以 g 为非多项式有理函数. 因为 $Q(g)g(g-1)g^{(k)}$ 仅有一个零点，则有 $g\neq 0$ 或者 $g\neq 1$.

如果 $g\neq 0$，则 $g(\xi)=\frac{1}{H(\xi)}$，其中 $H(\xi)$ 是非常数多项式. 既然 $g(\xi)-1=\frac{1-H(\xi)}{H(\xi)}$ 仅有一个零点，则

$$1-H(\xi)=A(\xi-B)^k, \tag{3.14}$$

$A\neq 0, B$ 为常数，$k\geq 2$ 是正整数.

我们断言 $H(\xi)$ 仅有单重零点. 如若不然，假设 $H(z_0)=0$ 且 z_0 为多重零点. 从 (3.14) 式求导可得出：$0=H'(z_0)=(1-H(z_0))'=Ak(z_0-B)^{(k-1)}$，这与 $z_0\neq B$ 相矛盾.

因此 $H(\xi)$ 仅有单零点，这与 g 无单极点矛盾.

如果 $g\neq 1$，与上述相同的方法讨论可得矛盾. 因此 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规. □

§3.4 定理 3.1 的证明

假设 $D=\{|z|<1\}$ 且 $\mathscr{F}$ 在 D 内不正规. 不失一般性, 可假设 $\mathscr{F}$ 在点 $z_0=0$ 不正规. 则由于引理 3.1, 可得存在点列 z_j, $z_j\to 0\ (j\to\infty)$; 函数列 $f_j\in\mathscr{F}$ 和数列 $\rho_j\to 0^+$ 使得

$$g_j(\xi)=\rho_j^{-\frac{k}{l+1}}f_j(z_j+\rho_j\xi) \tag{3.15}$$

依球面距离内闭一致收敛到 C 上的非常数亚纯函数 $g(\xi)$. 另外, $l(\geq k+1)$ 是常数且 $g(\xi)$ 的级至多为 2. 根据 Hurwitz 定理, 函数 $g(\xi)$ 的所有零点重数至少为 k.

下面我们分两种情况讨论.

情况 1. 若 $P(z)$ 有两个不同的零点, 记 $P(f)=f^l(f+1)\ (l\geq k+1)$.

如果 $g^lg^{(k)}\equiv b$, 则 g 无零点, 当然也没有极点. 由于 g 是级不超过 2 的非常数亚纯函数, 所以 $g(\xi)=e^{d\xi^2+h\xi+c}$ (d,h,c 是常数且 $dh\neq 0$). 在这种情况下, $g^n(\xi)g^{(k)}(\xi)\not\equiv b$, 得到矛盾.

如果 $g^lg^{(k)}\neq b$. 根据引理 3.2 可得 g 是一个常数函数. 这与 g 是非常数函数矛盾.

因此 $g^lg^{(k)}-b$ 是至少有一个零点的非常数亚纯函数.

下面我们将证明 $g^lg^{(k)}-b$ 仅有一个孤立零点. 若不然, 假设 ξ_0 和 ξ_0^* 是方程 $g^lg^{(k)}-b$ 的两个解. 我们可以取足够小的 δ 使得 g 与 g_j 分别在区域 $\xi_j\in D(\xi_0,\delta)$ 与 $\xi_j^*\in D(\xi_0^*,\delta)$ 上解析.

由 (3.15) 可推导出

$$[f_j^{l+1}(z_j+\rho_j\xi)+f_j^l(z_j+\rho_j\xi)]\cdot[f_j^{(k)}(z_j+\rho_j\xi)+H(f,f',\cdots,f^{(k)})]-b$$

$$=[\rho_j^{-\frac{lk}{l+1}}g_j^{(k)}(\xi)+\sum_{j=1}^{n}a_j^*\rho_j^{(\frac{k}{l+1}+1)\deg(M_j)-w(M_j)}M_i(g,g',\cdots,g^{(k)})]\cdot \tag{3.16}$$

$$[\rho_j^kg_j^{l+1}(\xi)+\rho_j^{\frac{lk}{l+1}}g_j^l(\xi)]-b\to g^l(\xi)g^{(k)}(\xi)-b.$$

选择 δ_1 使得 $D(\xi_0,\delta_1)\cap D(\xi_0^*,\delta_1)=\emptyset$ 且 $g^ng^{(k)}-b$ 在区域 $D(\xi_0,\delta)\cup D(\xi_0^*,\delta)$ 上没有其他零点。根据 Hurwitz 定理，存在点列 $\xi_j\in D(\xi_0,\delta)$； $\xi_j^*\in D(\xi_0^*,\delta)$ 使得当 j 足够大时满足

$$[f_j^{l+1}(z_j+\rho_j\xi_j)+f_j^l(z_j+\rho_j\xi_j)]G(f_j(z_j+\rho_j\xi_j))-b=0,$$

$$[f_j^{l+1}(z_j+\rho_j\xi_j^*)+f_j^l(z_j+\rho_j\xi_j^*)]G(f_j(z_j+\rho_j\xi_j^*))-b=0.$$

根据定理的假设：对任意的 $f,g\in\mathscr{F}$ 有 $P(f)G(f^{(k)})$ 和 $P(g)G(g^{(k)})$ 在 D 内 IM 分担 0，我们知道对任给的 m 有

$$[f_m^{l+1}(z_j+\rho_j\xi_j)+f_m^l(z_j+\rho_j\xi_j)]G(f_m(z_j+\rho_j\xi_j))-b=0,$$
$$[f_m^{l+1}(z_j+\rho_j\xi_j^*)+f_m^l(z_j+\rho_j\xi_j^*)]G(f_m(z_j+\rho_j\xi_j^*))-b=0.$$

固定 m 取 $j\to\infty$，注意到 $z_j+\rho_j\xi_j\to 0$； $z_j+\rho_j\xi_j^*\to 0$，则

$$[f_m^{l+1}(0)+f_m^l(0)]G(f_m(0))-b=0.$$

因为 $P(f)G(f)-b$ 的零点组成的集合在 D 上不存在聚点，因此 $z_j+\rho_j\xi_j=0$； $z_j+\rho_j\xi_j^*=0$.

即

$$\xi_j=-\frac{z_j}{\rho_j},\qquad \xi_j^*=-\frac{z_j}{\rho_j}.$$

这个结论与 $\xi_j\in D(\xi_0,\delta_1)$； $\xi_j^*\in D(\xi_0^*,\delta_1)$ 且 $D(\xi_0,\delta_1)\cap D(\xi_0^*,\delta_1)=\emptyset$ 相矛盾. 所以 $g^lg^{(k)}-b$ 仅有一个孤立零点，记为 ξ_0.

根据上述的讨论，方程 $g^lg^{(k)}-b$ 仅仅有一个零点，与引理 3.2 和引理 3.4 矛盾.

情况 2. 如果 $P(z)$ 有三个不同的零点以上，则 $P(z)=Q(g)g(g-1)(g-a)$.

不失一般性，我们可以假设 $\mathscr{F}$ 在点 $z_0=0$ 不正规. 根据引理 3.1，存在复数列 z_j $z_j\to 0$ $(j\to\infty)$；函数列 $f_j\in\mathscr{F}$；点列 $\rho_j\to 0^+$ 使得

$$g_j(\xi)=f_j(z_j+\rho_j\xi) \tag{3.17}$$

依球面导数内闭一致收敛到一个非常数亚纯函数 $g(\xi)$.

如定理 3.3 证明中一样，可以推出 $Q(g)g(g-1)(g-a)G(g)$ 仅有一个零点.

根据 Picard 定理，函数 g 不是超越亚纯函数. 因此 g 是一个非常数的有理函数且 g 不取 $\{0,1,a\}$ 中的两个元素. 这个结论与引理 3.5 矛盾. 因此 $\mathscr{F}$ 在点 z_0 上正规. □

第四章　分担全纯函数的正规族问题

Schwick 首先将正规族与分担值思想结合起来，后来国内外众多学者对这个领域进行了深入的研究，并把分担值改进为分担函数．本章考虑涉及分担全纯函数的正规族问题，我们把分担值思想应用到夏吉英和徐焱结果上，从而得到了一个关于微分多项式分担全纯函数的定理．本章定理的证明采用反证法，运用 Pang-Zalcman 引理， Hurwitz 定理以及一些值分布问题的结论得到矛盾，继而完成定理的证明．本章的结构安排如下：第一节是引言及主要结果，主要介绍研究问题的背景，基本的符号以及基本的结果，在此基础上，我们给出了本章的主要的定理以及定理的直接推论．第二节是主要引理，我们列出了定理证明所需要的全部引理，并把引理 4.3 推广到定理证明需要的形式 (见引理 4.4)．最后一节是定理的证明，我们给出了定理证明的详细过程．

§4.1　引言及主要结果

设 f 和 g 为区域 D 上的两个非常数的亚纯函数，$a \in \mathbb{C}$, 我们称 f 和 g 在 D 上 IM 分担值 a, 如果 $f-a$ 与 $g-a$ 有相同的零点 (不计重数)．当 $a=\infty$ 时 $f-a$ 的零点也就是 f 的极点 (见 [57])．

1989 年，Schwick [51] 证明了：若 $\mathscr{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数，对任意的 $f \in \mathscr{F}$ 满足 $(f^n)^{(k)} \neq 1$, 其中 $n \geq k+3$ 为两个正整数，则 $\mathscr{F}$ 在区域 D 内正规．

最近，从分担值的思想出发，李运通和顾永兴 [34] 证明了：

定理 4A. 设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 上的一族亚纯函数．如果对每对 $f, g \in \mathscr{F}$ 有 $(f^n)^{(k)}$ 和 $(g^n)^{(k)}$ 在 D 上分担 a, 这里 n, k 是两个正整数且 $n \geq k+2$ 且 a 是一有限的非零复数，则 $\mathscr{F}$ 在 D 上正规．

1998 年，王跃飞和方明亮 [53] 得到了如下结果．

定理 4B. 设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 上的一族亚纯函数. 设 k 为一正整数且 b 为一非零有穷复数. 如果对每一个 $f \in \mathscr{F}$, f 所有的零点重数至少是 $k+2$, 并且 $f^{(k)}(z) \neq b$, 则 $\mathscr{F}$ 在 D 上正规.

注记 4.1. 通过一个反例, 王跃飞和方明亮 [53] 表明定理 4B 对 f 所有零点重数小于 $k+2$ 是不正确的.

本节中, 我们使用的微分多项式如定义 3.2 中的形式.

在 1979 年, 顾永兴 [16] 证明了下面的结果:

定理 4C. 假设 $\mathscr{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族, 且 k 是正整数, a 是非零常数. 若对于任意的函数 $f \in \mathscr{F}$ 在区域 D 上都满足 $f \neq 0$, $f^{(k)} \neq a$, 则 $\mathscr{F}$ 在 D 上正规.

杨乐 [60] 和 Schwick [51] 证实了上述定理中的常数 a 换为全纯函数 $\psi(\not\equiv 0)$ 时结论依然成立.

徐焱 [55] 进一步将分担值的思想引入到定理 4C, 得到了下面的结果:

定理 4D. 假设 $\mathscr{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族满足任意函数 $f \in \mathscr{F}$, $f \neq 0$ 且 f 的极点都是重极点. 令 $\psi(\not\equiv 0)$ 是区域 D 上的一个全纯函数且仅有单零点, k 是正整数. 若对于任意的函数 $f^{(k)}, g^{(k)} \in \mathscr{F}$ 在区域 D 上 IM 分担 ψ, 则 $\mathscr{F}$ 在 D 上正规.

很自然的有一个问题: 在定理 4D 的条件中, 全纯函数 ψ 在区域 D 上仅有单零点和函数族中的函数 f 所有的极点都是重极点是否是必需的?

在 2007 年, 方明亮和常建明 [13] 考虑了定理 4C 中 $a=0$ 的情况, 证明了下面的结论:

定理 4E. 假设 $\mathscr{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族, 且 k 是正整数, b 是非零复数. 若对于任意的函数 $f \in \mathscr{F}$ 在区域 D 上都满足 $f \neq 0$, $f^{(k)} \neq 0$ 以及 $f^{(k)} - b$ 的零点重数至少为 $\frac{k+2}{k}$, 则 $\mathscr{F}$ 在 D 上正规.

标注 4.2. 上述定理条件中的实数 $\frac{k+2}{k}$ 已经达到最小值, 可参见 [13] 的例子.

夏吉英，徐焱 [57] 于 2009 年用全纯函数 $\psi(z)\neq 0$ 替换定理 4E 中的常数 b，证实了下面的结论：

定理 4F. 假设 $\mathscr{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族，$\psi(\not\equiv 0), a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ 是区域 D 上的全纯函数，且 k 是正整数. 若对于任意的函数 $f\in\mathscr{F}$ 在区域 D 上都满足 $f\neq 0$，$f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+...+a_1f'+a_0f\neq 0$ 以及

$$f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+...+a_1f'+a_0f-\psi(z)$$

的零点重数至少为 $\frac{k+2}{k}$. 当 $k=1$ 时，ψ 的零点重数最多为 2；当 $k\geq 2$ 时，ψ 仅有单零点. 则 $\mathscr{F}$ 在 D 上正规.

自然我们想到能否将分担值的思想引入到定理 4F 中？在本章中，我们就这个问题做了研究，得到了下面的定理：

定理 4.1. 假设 $\mathscr{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族，$\psi(\not\equiv 0), a_0, a_1, , ..., a_{k-1}$ 是全纯函数，且 k 是正整数. 若对于任意的函数 $f\in\mathscr{F}$ 在区域 D 上都满足 $f\neq 0$，$P(f)=f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+...+a_1f'+a_0f\neq 0$ 以及对任意的函数 $f,g\in\mathscr{F}$ 有 $P(f)$ 和 $P(g)$ IM 分担 ψ. 则 $\mathscr{F}$ 在 D 上正规.

从定理 4.1 可以推出下面的结果：

推论 4.2. 假设 $\mathscr{F}$ 是区域 D 内的亚纯函数族，$\psi(\not\equiv 0), a_0, a_1, , ..., a_{k-1}$ 是全纯函数，且 k 是正整数. 若对于任意的函数 $f\in\mathscr{F}$ 在区域 D 上都满足 $f\neq 0$，$f^{(k)}\neq 0$ 以及对任意的函数 $f,g\in\mathscr{F}$ 有 $f^{(k)}$ 和 $g^{(k)}$ IM 分担 ψ. 则 $\mathscr{F}$ 在 D 上正规.

标记 4.3. 根据分担值思想，定理 4.1 和推论 4.2 去掉了原来定理中 ψ 的零点都是单零点的限制.

标记 4.4. 推论 4.2 删去了定理 4D 中的 ψ 仅有单零点以及任意函数 $f\in\mathscr{F}$ 的所有极点都是重极点. 但是增加了条件：对任意函数 $f\in\mathscr{F}$ 有 $f^{(k)}\neq 0$. 因此推论 4.2 一定意义上改进了定理 4D.

定理 4.1 中的条件 $\psi\not\equiv 0$ 是必需的，下面的例子可以说明.

例 4.1. 取 $\mathscr{F}=\{f_m(z)=e^{mz}, m=1,2,\cdots\}$，明显地，对任意的函数

$f \in \mathscr{F}$ 满足 $f \neq 0$，$f^{(k)} \neq 0$. 对于不同的正整数 m, n，$f_m^{(k)}$ 与 $f_l^{(k)}$ IM 分担 0. 但是，$\mathscr{F}$ 在点 $z = 0$ 不正规.

标记 4.5. 本章的思想来自于 [34] [55] [57].

§4.2 主要引理

为了证明我们的定理，我们需要下面的引理.

引理 4.1.([23]) 假设 $f(z)$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的超越亚纯函数，$k(\geq 1)$ 是正整数且 b 是一非零有穷值. 则 f 或者 $f^{(k)} - b$ 有无穷多个零点.

引理 4.2.([55]) 假设 $f(z)$ 为非常数的亚纯函数，$k(\geq 1)$ 是正整数且 b 是一非零有穷值. 若 $f \neq 0$, 则 $f^{(k)}(z) - b$ 在复平面上最少有两个不同的零点.

引理 4.3. 假设 $f(z)$ 为非常数的亚纯函数，$k(\geq 1)$ 和 l 是正整数. 若 $f \neq 0$ 且 $f^{(k)} \neq 0$, 则 $f^{(k)}(z) - z^l$ 在复平面上最少有两个不同的零点.

证明 因为 $f \neq 0$ 以及 $f^{(k)} \neq 0$, 则 f 是非多项式的有理函数且 f 的形式为：

$$f(z) = \frac{A}{(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\cdots(z-z_t)^{m_t}}, \tag{4.1}$$

式中 $A \neq 0$ 为常数，$m_1, m_2, \ldots, m_t$ 为正整数.

令 $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_t$, 则

$$f'(z) = \frac{-A(mz^{t-1} + b_{t-2}z^{t-2} + \ldots + b_0)}{(z-z_1)^{m_1+1}(z-z_2)^{m_2+1}\cdots(z-z_t)^{m_t+1}}, \tag{4.2}$$

其中 $b_{t-2}, \ldots, b_0$ 为常数, 对于 $k \geq 2$, 运用数学归纳法可以得到：

$$f^{(k)}(z) = \frac{Bz^{kt-k} + c_{kt-k-1}z^{kt-k-1} + \ldots + c_0}{(z-z_1)^{m_1+k}(z-z_2)^{m_2+k}\cdots(z-z_t)^{m_t+k}} \tag{4.3}$$

其中 $B = (-1)^k m(m+1)(m+2)\ldots(m+k-1)A \neq 0$，$c_{kt-k-1}, \ldots, c_0$ 是常数，由 $f^{(k)} \neq 0$, 我们推出 $t = 1$ 且有

$$f(z) = \frac{A}{(z-z_1)^{m_1}}, \tag{4.4}$$

$$f^{(k)}(z)=\frac{B}{(z-z_1)^{m_1+k}}. \tag{4.5}$$

下面我们分情况讨论.

情况 1. 若 $f^{(k)}-z^l$ 仅有一个零点，记为 z_0。

从 (4.5) 式，我们令

$$f^{(k)}(z)-z^l=\frac{B}{(z-z_1)^{m_1+k}}-z^l=\frac{B'(z-z_0)^{m_1+k+l}}{(z-z_1)^{m_1+k}}. \tag{4.6}$$

明显地，B' 为非零常数且 $l\geq 1$.

由于 (4.6) 式，我们得到：

$$f^{(k+l+1)}(z)=\frac{(z-z_0)^{m_1+k-1}P_1(z)}{(z-z_1)^{m_1+k+l+1}}. \tag{4.7}$$

其中 $P_1(z)\not\equiv 0$.

根据 (4.4) 式可以推出：

$$f^{(k+l+1)}(z)=\frac{A'}{(z-z_1)^{m_1+k+1+1}}, \tag{4.8}$$

式中 A' 为非零常数.

比较 (4.7) 式与 (4.8) 式不难得到 $\deg A'=0\geq m_1+k-1$, 矛盾.

情况 2. 若 $f^{(k)}(z)-z^l\neq 0$ 成立.

由 (4.5) 式可以证明情况 2 不成立. □

引理 4.4.([55]) 假设 $\mathscr{F}$ 是定义在区域 D 上的亚纯函数族，k 是正整数且 $\psi(\not\equiv 0)$ 是定义在区域 D 上的全纯函数. 如果对任意的 $f\in\mathscr{F}$ 都满足 $f\neq 0$, 且对任意的 $f,g\in\mathscr{F}$ 都有 $f^{(k)}$ 和 $g^{(k)}$ IM 分担 ψ, 则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

在本章中，我们利用与文 [55] 中相同的方法，推广了引理 4.4 得到了下面更一般的结论：

引理 4.5. 假设 $\mathscr{F}$ 是定义在区域 D 上的亚纯函数族，k 是正整数且 $\psi(\not\equiv 0)$ 是定义在区域 D 上的全纯函数. 如果对任意的 $f\in\mathscr{F}$ 都有 $f\neq 0$, 且对任意的

$f, g \in \mathscr{F}$ 都有 $G(f)$ 和 $G(g)$ IM 分担 ψ，其中 $G(f)$ 是满足条件 $q \geq \deg(H)$ 和 $\frac{w}{\deg}|_H < k+1$ 的微分多项式. 则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

其中微分多项式的权 w，次数 deg 以及 $\frac{w}{\deg}|_H$ 的定义见第 3.1 节.

证明 我们不妨取 $D = \Delta = \{|z| < 1\}$，假设 $\mathscr{F}$ 在区域 D 内不正规. 不失一般性，可以假设 $\mathscr{F}$ 在点 $z_0 = 0$ 处不正规. 运用 Zalcaman 引理，存在一个实数 $r \in (0, 1)$；复数列 z_j 且 $z_j \to 0$ $(j \to \infty)$；函数列 $f_j \in \mathscr{F}$ 以及一正实数列 $\rho_j \to 0^+$ 使得 $g_j(\xi) = \rho_j^{-k} f_j(z_j + \rho_j \xi)$ 依球面距离内闭一致收敛到 C 上的非常数亚纯函数 $g(\xi)$. 而且，$g(\xi)$ 的级至多是 2. Hurwitz 暗含 $g(\xi) \neq 0$. 我们有：

$$G(f_j)(z_j + \rho_j \zeta) = P(f_j^{(k)}(z_j + \rho_j \zeta)) + H(f_j, f_j', \ldots, f_j^{(k)})(z_j + \rho_j \zeta),$$

且

$$\begin{aligned} & H(f_j, f_j', \ldots, f_j^{(k)})(z_j + \rho_j \zeta) \\ = & \sum_{i=1}^{n} b_i(z_j + \rho_j \zeta) \rho_j^{(k+1)\deg(M_i) - w(M_i)} M_i(g_j, g_j', \ldots, g_j^{(k)})(\zeta). \end{aligned}$$

考虑到 $b_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 在 D 上解析，则对于足够大的 j

$$|b_i(z_j + \rho_j \zeta)| \leq M\left(\frac{1+r}{2}, b_i(z)\right) < \infty, (i = 1, 2, \ldots, n)$$

成立.

我们从 $\frac{w}{\deg}|_H < k+1$ 可以推导出：

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(z_j + \rho_j \zeta) \rho_j^{(k+1)\deg(M_i) - w(M_i)} M_i(g_j, g_j', \ldots, g_j^{(k)})(\zeta)$$

在 $\mathbb{C}$ 上任意不包含函数 $g(\xi)$ 极点的闭子集上内闭一致收敛到 0.

因此有：

$$G(f_j)(z_j + \rho_j \zeta) \to P(g^{(k)})(\zeta) \tag{4.9}$$

$$G(f_j)(z_j + \rho_j \zeta) - \psi(z_j + \rho_j \zeta) \to P(g^{(k)})(\zeta) - \psi(z_0) \tag{4.10}$$

在 $\mathbb{C}$ 上任意不包含函数 $g(\xi)$ 极点的闭子集上成立.

下面我们将证明 $G(f_j)(\zeta)-\psi(z_0)$ 仅有一个零点. 利用反证法, 令 ζ_0 和 ζ_0^* 是 $G(f_j)(\zeta)-\psi(z_0)$ 的两个不同的零点, 则我们可选择足够小的 $\delta(>0)$ 使得 $D(\zeta_0,\delta)\cap D(\zeta_0^*,\delta)=\emptyset$. 其中 $D(\zeta_0,\delta)=\{\zeta:|\zeta-\zeta_0|<\delta\}$; $D(\zeta_0^*,\delta)=\{\zeta:|\zeta-\zeta_0^*|<\delta\}$. 由 Hurwitz 定理可知存在 $\zeta_j\in D(\zeta_0,\delta)$; $\zeta_j^*\in D(\zeta_0^*,\delta)$ 使得对足够大的 j 有:

$$G(f_j)(z_j+\rho_j\zeta_j)-\psi(z_0)=0,$$

$$G(f_j)(z_j+\rho_j\zeta_j^*)-\psi(z_0)=0.$$

根据定理的假设: 对于任给的 $f,g\in\mathscr{F}$ 都有 $G(f)$ 和 $G(g)$ IM 分担 $\psi(z_0)$. 我们得到对于任意的正整数 m 都有:

$$G(f_m)(z_j+\rho_j\zeta_j)-\psi(z_0)=0,$$

$$G(f_m)(z_j+\rho_j\zeta_j^*)-\psi(z_0)=0.$$

固定 m 取 $j\to\infty$, 注意到 $z_j+\rho_j\zeta_j\to 0$; $z_j+\rho_j\zeta_j^*\to 0$, 则

$$G(f_m)(0)-\psi(z_0)=0.$$

因为 $G(f_m)(0)-\psi(z_0)$ 的零点构成的点集无聚点, 所以有:

$$z_j+\rho_j\zeta_j=0; \qquad z_j+\rho_j\zeta_j^*=0.$$

因此

$$\zeta_j=-\frac{z_j}{\rho_j}, \qquad \zeta_j^*=-\frac{z_j}{\rho_j}.$$

这与 $\zeta_j\in D(\zeta_0,\delta)$; $\zeta_j^*\in D(\zeta_0^*,\delta)$ 且 $D(\zeta_0,\delta)\cap D(\zeta_0^*,\delta)=\emptyset$ 相矛盾. 因此 $G(f_j)-\psi(z_0)$ 仅有一个零点.

再次运用 Hurwitz 定理可得 $P(g^{(k)})(\zeta)-\psi(z_0)$ 仅有一个零点.

根据引理 4.1 与引理 4.2, $g^{(k)}(\zeta)-\psi(z_0)$ 至少有两个不同的零点. 从 $P(w)$ 的定义, 我们推得 $P(g^{(k)}(\zeta))-\psi(z_0)$ 至少有两个不同的零点, 得到矛盾.

因此 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规. $\square$

根据引理 4.5, 我们立即可推出下面的引理.

引理 4.6. 假设 $\mathscr{F}$ 是定义在区域 D 上的亚纯函数族, k 是正整数且 $\psi(\not\equiv 0), a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ 是定义在区域 D 上的全纯函数. 如果对任意的 $f \in \mathscr{F}$ 都满足 $f \neq 0$, $f^{(k)} + a_{k-1}f^{(k-1)} + ... + a_1f' + a_0f \neq 0$ 且对任意的 $f, g \in \mathscr{F}$ 都有 $f^{(k)} + a_{k-1}f^{(k-1)} + ... + a_1f' + a_0f$ 与 $g^{(k)} + a_{k-1}g^{(k-1)} + ... + a_1g' + a_0g$ IM 分担 ψ, 则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

引理 4.7.([23]) 假设 $f(z)$ 为亚纯函数, k 是正整数. 若 $f \neq 0$, $f^{(k)}(z) \neq 1$, 则 f 蜕化为常数函数.

引理 4.8.([5] [56]) 假设 $f(z)$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的超越亚纯函数, k 是正整数且 $P(\not\equiv 0)$ 为多项式. 若 f 的所有零点重数 (除有穷多个外) 至少是 3, 则 $f^{(k)}(z) - P(z)$ 有无穷多个零点.

§4.3 定理 4.1 的证明

既然正规性是局部性质, 不失一般性, 我们可以假设 $D = \Delta = \{z : |z| < 1\}$ 且

$$\psi(z) = z^l \varphi(z) \quad (z \in \Delta),$$

其中 l 是正整数, $\varphi(0) = 1$, 在 $\Delta' = \{z : 0 < |z| < 1\}$ 上有 $\varphi(z) \neq 0$. 根据引理 4.5, 我们仅仅需要证明函数族 $\mathscr{F}$ 在点 $z = 0$ 处正规.

如果 $f \in \mathscr{F}$, $P(f)(0) \neq \psi(0)$, 则存在 $\delta > 0$ 使得在 Δ_δ 上 $P(f)(z) \neq \psi(z)$. 由定理的条件, 对任意的 $g \in \mathscr{F}$ 有 $P(g)(z) \neq \psi(z)$ 在 Δ_δ 上成立. 运用定理 D 的结果, $\mathscr{F}$ 在 Δ_δ 上正规, 因此 $\mathscr{F}$ 在 $z = 0$ 点正规.

接下来我们考虑 $P(f)(0) = \psi(0)$, 假设在区域 $|z| < \delta$ (δ 是一个比较小的正整数) 上满足 $P(f)(z) \not\equiv \psi(z)$. (否则, 在区域 $|z| < \delta$ 上有 $P(f)(z) \equiv \psi(z)$, 则根据定理的条件, 对任意的 $g \in \mathscr{F}$ 有 $P(g)(z) \equiv \psi(z)$ 成立.

因此 $P(g)(z) \neq \psi(z) + 1$, 则可以根据定理 4F 得到 $\mathscr{F}$ 在点 $z = 0$ 处正规, 即在这种情况下完成定理的证明. 假设存在 $\delta > 0$ 使得在 $z \in \Delta'_\delta$ 上有 $P(f)(z) \neq \psi(z)$, 则对任意的 $g \in \mathscr{F}$, 我们有:

$$P(g)(z) \neq \psi(z) \quad (z \in \Delta'_\delta). \tag{4.11}$$

由定理 4F 可知 $\mathscr{F}$ 在 Δ' 上正规.

接下来，我们将证明 $\mathscr{F}$ 在点 $z=0$ 处正规. 假设结论不真，则 $\mathscr{F}$ 在点 $z=0\in\Delta$ 不正规. 即函数族 $\mathscr{F}$ 存在一个子列，仍记为 $\mathscr{F}$，使得它在点 $z=0$ 处无任何正规的子列.

考虑函数族 $\Im=\{g(z)=\frac{f(z)}{\psi(z)}: f\in\mathscr{F}, z\in\Delta\}$，由于对任意的 $f\in\mathscr{F}$ 都有 $f\neq 0$，则我们有 $g(0)=\infty$ 对任意的函数 $g\in\Im$ 成立.

首先我们证明 $\Im$ 在 Δ 上正规. 利用反证法，假设 $\Im$ 在点 $z_0\in\Delta$ 不正规，由引理 3.1，存在一函数列 $g_n\in\Im$；点列 $z_n\to z_0$ 以及正实数列 $\rho_n\to 0$ 使得

$$G_n(\xi)=\frac{g_n(z_n+\rho_n\xi)}{\rho_n^k}\to G(\xi)$$

依球面距离内闭一致收敛到一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数，且有 $G(\xi)\neq 0$.

下面我们分两种情况讨论

情况 1. $\dfrac{z_n}{\rho_n}\to\infty.$

通过简单的计算，对于 $0\le i\le k$ 我们有：

$$\begin{aligned} g_n^{(i)}(z)&=\frac{f_n^{(i)}(z)}{\psi(z)}-\sum_{j=1}^{i}C_i^j g_n^{(i-j)}(z)\frac{\psi^{(j)}(z)}{\psi(z)}\\ &=\frac{f_n^{(i)}(z)}{\psi(z)}-\sum_{j=1}^{i}[C_i^j g_n^{(i-j)}(z)\sum_{t=0}^{j}A_{jt}\frac{1}{z^{j-t}}\frac{\varphi^{(t)}(z)}{\varphi(z)}] \end{aligned}\tag{4.12}$$

其中 $A_{jt}=l(l-1)\cdots(l-j+t+1)C_j^t\ \ l<j,\ \ t=0,1,...,j-1$ 且 $A_{jj}=1$.

由 (4.12) 式，我们可以推出：

$$\rho_n^{k-i}G_n^{(i)}(\xi)=g_n^{(i)}(z_n+\rho_n\xi)$$

$$=\frac{f_n^{(i)}(z_n+\rho_n\xi)}{\psi(z_n+\rho_n\xi)}-\sum_{j=1}^{i}[C_i^j g_n^{(i-j)}(z_n+\rho_n\xi)\sum_{t=0}^{j}A_{jt}\frac{1}{(z_n+\rho_n\xi)^{j-t}}\frac{\varphi^{(t)}(z_n+\rho_n\xi)}{\varphi(z_n+\rho_n\xi)}]$$

$$=\frac{f_n^{(i)}(z_n+\rho_n\xi)}{\psi(z_n+\rho_n\xi)}-\sum_{j=1}^{i}[C_i^j \frac{g_n^{(i-j)}}{\rho_n^j}(z_n+\rho_n\xi)\sum_{t=0}^{j}A_{jt}\frac{1}{(z_n+\rho_n\xi)^{j-t}}\frac{\rho_n^t\varphi^{(t)}(z_n+\rho_n\xi)}{\varphi(z_n+\rho_n\xi)}].$$

另一方面，我们有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{z_n}{\rho_n}+\xi}=0$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\rho_n^t\varphi^{(t)}(z_n+\rho_n\xi)}{\varphi(z_n+\rho_n\xi)}=0$$

对于 $t\geq 1$ 成立. 注意到 $\frac{g_n(z_n+\rho_n\xi)}{\rho_n^k}\to G(\xi)$，则 $\frac{g_n^{(i-j)}(z_n+\rho_n\xi)}{\rho_n^j}$ 在 $\mathbb{C}$ 上除去函数 $G(\xi)$ 的极点以外的集合内一致有界. 因此，在 $\mathbb{C}$ 的任何子集内都不包含函数 $G(\xi)$ 的极点. 我们有：

$$\frac{f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi)}{\psi(z_n+\rho_n\xi)}\to G^{(k)}(\xi),$$

$$\frac{f_n^{(i)}(z_n+\rho_n\xi)}{\psi(z_n+\rho_n\xi)}\to 0,$$

$i=0,1,...,k-1$.

既然 $a_0,...,a_{k-1}$ 在区域 D 内解析，进一步可以推得：

$$\frac{f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi)+\Sigma_{i=0}^{k-1}a_i(z_n+\rho_n\xi)f_n^{(i)}(z_n+\rho_n\xi)}{\psi(z_n+\rho_n\xi)}\to G^{(k)}(\xi),$$

$$\frac{f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi)+\Sigma_{i=0}^{k-1}a_i(z_n+\rho_n\xi)f_n^{(i)}(z_n+\rho_n\xi)-\psi(z_n+\rho_n\xi)}{\psi(z_n+\rho_n\xi)}\to G^{(k)}(\xi)-1.$$

我们从 $G(\xi)\neq 0$ 可以推导出 $G^{(k)}(\xi)\not\equiv 1$. 为了证明这个结论，我们不妨假设 $G^{(k)}(\xi_0)=1$ 成立. 运用 Hurwitz 定理，存在 $\xi_n\to\xi_0$ 使得当 n 足够大时有：

$$P(f)(z_n+\rho_n\xi_n)=\psi(z_n+\rho_n\xi_n).$$

根据定理的条件，对任意的正整数 m，有 $P(f_m)(z_n+\rho_n\xi_n)=\psi(z_n+\rho_n\xi_n)$ 成立. 另外由于 $z_n+\rho_n\xi_n\to z_0\in\Delta_\delta$ 以及对足够大的 n 有 $z_n+\rho_n\xi_n\in\Delta_\delta$ 成立，而且 $z_n+\rho_n\xi_n\neq 0$ （否则，有 $z_n+\rho_n\xi_n=0$ 暗含 $\xi_n=-\frac{z_n}{\rho_n}\to\infty$，矛盾）. 因此对足够大的 n，有 $z_n+\rho_n\xi_n\in\Delta'_\delta$. 这与 (4.11) 式矛盾.

由此可得 $G(\xi)\neq 0$；$G^{(k)}(\xi)\neq 1$. 运用引理 4.7 可知 G 是一个常数，得到矛盾.

情况 2. $\frac{z_n}{\rho_n} \to \alpha$，$\alpha$ 是有穷复数. 则

$$\frac{g_n(\rho_n\xi)}{\rho_n^k} = \frac{g_n(z_n + \rho_n(\xi - \frac{z_n}{\rho_n}))}{\rho_n^k} = G_n(\xi - \frac{z_n}{\rho_n}) \to G(\xi - \alpha) = \mathbb{G}(\xi),$$

不难看出 $\mathbb{G}(\xi) \neq 0$ 且 $\xi = 0$ 是函数 $\mathbb{G}$ 的一个重数至少是 l 的极点. 令

$$H_n(\xi) = \frac{f_n(\rho_n\xi)}{\rho_n^{k+l}}. \tag{4.13}$$

则

$$H_n(\xi) = \frac{\psi(\rho_n\xi)}{\rho_n^l}\frac{f_n(\rho_n\xi)}{\rho_n^k\psi(\rho_n\xi)} = \frac{\psi(\rho_n\xi)}{\rho_n^l}\frac{g_n(\rho_n\xi)}{\rho_n^k}.$$

注意到 $\frac{\psi(\rho_n\xi)}{\rho_n^l} \to \xi^l$, 则有:

$$H_n(\xi) \to \xi^l\mathbb{G}(\xi) = H(\xi)$$

在 $\mathbb{C}$ 的闭子集上一致收敛. 既然 $\xi = 0$ 是函数 $\mathbb{G}$ 的一个极点, 所以有 $H(0) \neq 0$, $H(\xi) \neq 0$.

运用 (4.13) 式，我们得到:

$$H_n^{(i)} = \frac{f_n^{(i)}(\rho_n\xi)}{\rho_n^{k+l-i}} \to H^{(i)}(\xi),$$

在 $\mathbb{C}$ 的不包含函数 $\mathbb{G}(\xi)$ 极点的闭子集上一致收敛. 根据上面的叙述，我们有:

$$\frac{f_n^{(k)}(\rho_n\xi) + \Sigma_{i=0}^{k-1}a_i(\rho_n\xi)f_n^{(i)}(\rho_n\xi)}{\rho_n^l} \to H^{(k)}(\xi), \tag{4.14}$$

以及

$$\frac{f_n^{(k)}(\rho_n\xi) + \Sigma_{i=0}^{k-1}a_i(\rho_n\xi)f_n^{(i)}(\rho_n\xi) - \psi(\rho_n\xi)}{\rho_n^l} \to H^{(k)}(\xi) - \xi^l, \tag{4.15}$$

在 $\mathbb{C}$ 上内闭一致收敛.

由于定理的假设条件以及 (4.15) 式，Hurwitz 定理暗含 $H^{(k)}(\xi) \neq 0$.

下面我们证明当 $\xi \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 时，有 $H^{(k)}(\xi) \neq \xi^l$ 成立.

首先我们证明 $H^{(k)}(\xi) \not\equiv \xi^l$. 否则有 $H^{(k)}(\xi) \equiv \xi^l$, 与 $H(\xi) \neq 0$ 相矛盾. 若存在 $\xi_0 \neq 0$ 使得 $H^{(k)}(\xi_0) = \xi_0^l$, 则从定理的条件以及 (4.15) 式出发, 运用 Hurwitz 定理可以得到存在 $\xi_n \to \xi_0$ 使得 $f_n^{(k)}(\rho_n\xi_n) + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(\rho_n\xi_n) f_n^{(i)}(\rho_n\xi_n) = \psi(\rho_n\xi_n)$. 根据定理 4.1 的假设, 对任意正整数 m 有 $P(f_m)(\rho_n\xi_n) = \psi(\rho_n\xi_n)$. 而对足够大的 n 有 $\rho_n\xi_n \in \Delta'_\delta$ 成立. 这与 (4.11) 式矛盾. 因此, 当 $\xi \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 时, $H^{(k)}(\xi) \neq \xi^l$ 成立.

注意到 $H(\xi) \neq 0$, 则根据引理 4.8, H 一定是有理函数. 假如 H 为一个常数. 我们运用引理 4.3 可知 $H^{(k)}(\xi) - \xi^l$ 至少有两个不同的零点, 得到矛盾. 因此 H 一定是非零常数, 与 $H^{(k)}(\xi) \neq 0$ 矛盾. 至此, 我们证明了函数族 $\Im$ 在 Δ_δ 上正规.

我们继续说明函数族 $\mathscr{F}$ 在点 $z = 0$ 处正规. 既然 $\Im$ 在 Δ 上正规, 则函数族 $\Im$ 在区域 Δ 上依球面距离等度连续. 另外对任意的 $g \in \Im$, $g(0) = \infty$, 因此存在 $\delta > 0$ 使得 $|g(z)| \geq 1$ 对于任意的函数 $g \in \Im$ 以及任意的 $z \in \Delta_\delta = \{z : |z| < \delta\}$ 成立. 假设 $\mathscr{F}$ 在点 $z = 0$ 不正规. 由于 $\mathscr{F}$ 在区域 $0 < |z| < 1$ 内正规, 则函数族 $\mathscr{F}_1 = \{\frac{1}{f} : f \in \Im\}$ 在 $\Delta = \{z : 0 < |z| < 1\}$ 内正规, 但在点 $z = 0$ 处不正规. 所以存在一列函数 $\{\frac{1}{f_n}\} \subset \mathscr{F}_1$ 在 Δ' 内正规但在 Δ 内不正规. 注意到在 Δ 内 $f_n \neq 0$, 以及对任意的 n, $\frac{1}{f_n}$ 在 Δ 内解析. 运用最大模原理可得在 Δ' 内有 $\frac{1}{f_n} \to \infty$. 因此 f_n 在 Δ' 内内闭一致收敛到 0. 对于 $\{g_n\} \subset \Im$ 以及 $g_n = \frac{f_n}{\varphi}$ 上面结果也成立. 但是对任意的 $z \in \Delta_\delta$ 有 $|g_n(z)| \geq 1$ 成立, 矛盾. □

参考文献

[1] D. Barnett, R. G. Halburd, R. J. Korhonen, W. Morgan, Applications of Nevanlinna theory to q-difference, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.A. 137 (2007) 457-474.

[2] W. Bergweiler, Bloch's principle, Comput Methods Funct. Theory. 6 (2006) 77-108.

[3] W. Bergweiler, A. Eremenko. Complex dynamics and value distribution, in: Intenational Conference of Complex Analysis, Nanjing, 1994.

[4] W. Bergweiler, J. K. Langley, Zeros of difference of meromorphic functions, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 142 (2007) 133-147.

[5] W. Bergwerler, X. C. Pang, On the derivative of meromorphic function with multiple zeros, J Math. Anal. Appl. 278 (2003) 285-292.

[6] M. Chao, Normal families and shared values of meromorphic functions. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 31 (2008) no.1 85-90.

[7] H. H. Chen, Y. X. Gu, Improvement of Maty's criterion and its application. Sci China. Ser A. 36 (1993) 647-681.

[8] H. H. Chen, M. L. Fang, On the value distribution of $f^n f'$, Sci China. Ser A. 38 (1995) 789-798.

[9] Z. X. Chen, On value distribution of difference polynomial of meromorphic functions, Abst. Appl. Anal. 2011 (2011) 1-9 ID:239853.

[10] Y. M. Chiang, S. J. Feng, On the growth of logarithmic differences, difference quotients and logarithmic derivatives of meromorphic functions, Amer. Math. Soc. 361(7) (2009) 3767-3791.

[11] Y. M. Chiang, S. J. Feng, On the Nevanlinna characteristic $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane, Ramanujan. J. 16 (2008) 105-129.

[12] J. Clunie, On a result of Hayman, J. London Math Soc. 42(1967) 389-392.

[13] M. L. Fang, J. M. Chang, Normal families and multiple values, Arch. Math. 88 (2007) 560-568.

[14] M. L. Fang, L. Zalcman, A note on normality and shared values, J. Aust. Math. Soc., 76(2004) 141-150.

[15] Y. X. Gu, On normal families of meromorphic functions, Sci China. Ser A, 36(1978) 373-384.

[16] Y. X. Gu, A normal criterion of mermorphic families, Sci, Sinica 1 (1979) 267-274.

[17] J. Grahl, Differential polynomial with dilations in the argument and normal families, Mona. Math. 162 (2011) 429-452.

[18] R. G. Halburd, R. J. Korhonen, Difference analogue of the lemma on the Logarithmic Derivative with application to difference equations, J. Math. Anal. Appl. 314 (2006) 477-487.

[19] R. G. Halburd, R. J. Korhonen, Nevanlinna theory for the difference operator, Ann. Acad. Sci. Fenn. 31(2) (2006) 463-478.

[20] R. G. Halburd, R. J. Korhonen, Finite-order meromorphic solutions and the discrete Painleve equations, Proc. London Math. Soc. 94(2) (2007) 443-474.

[21] R. G. Halburd, R. J. Korhonen, Holomorphic curves with shift invariant hyperplane preimages, arXiv:0903.3236.

[22] W. K. Hayman, Picard values of meromorphic Functions and their derivatives, Anna. Math. 70 (1959) 9-42.

[23] W. K. Hayman, Meromorphic Functions. Clarendon Press, Oxford, UK, (1964).

[24] W. K. Hayman, Picard value of meromorphic functions and their derivatives, Ann. of Math. 70 (1959) 9-42.

[25] W. K. Hayman, Research problem in function theory. (Athlone Press, University of London, 1967).

[26] J. Heittokangas, R. L. Korhonen, I. Laine, J. Rieppo, K. Tohge, Complex difference equations of Malmquist type, Comput. Methods Funct. Theory 1 (2001) 27-39.

[27] J. Heittokangas, R. L. Korhonen, I. Laine, J. Rieppo, L. J. Zhang, Value sharing results for shifts of meromorphic function and sufficient conditions for periodicity, J. Math. Anal. Appl. 355 (2009) 352-363.

[28] K. Ishizaki, N. Yanagihara, Wiman-Valrion method for difference equations, Nagoya Math. J. 175 (2004) 75-102.

[29] I. Laine, Nevanlinna Theory and Complex Differential Equation, Walter de Gruyter, Berlin-New York, (1993).

[30] I. Laine, C. C. Yang, Clunie theorems for difference q-difference polynomials, J. London Math. Soc. 76 (2007) 556-566.

[31] I. Laine, C. C. Yang, Value Distribution of Difference Polynomials, Proc. Japan Acad. Ser. A 83 (2007) 148-151.

[32] C. L. Lei, M. L. Fang, Normality and shared values concerning differential polynomials, Sci China. Ser A, 53 (2010) 749-754.

[33] L. C. Lei, M. L. Fang, D. G. Yang, Normal families and shared values of meromorphic functions, Proc. Japan Acad.(Ser. A), 83(2007) 36-39.

[34] Y. T. Li, Y. X. Gu, On normal families of meromorphic functions, J. Math. Anal. Appl. 354(2009) 421-425.

[35] S. Y. Li, H. C. Xie, On normal families of meromorphic functions, Acta Math. Sinica, 29 (1986) 468-476.

[36] K. Liu, Applications of Nevanlinna theory in difference polynomial, Doctoral Dissertation.

[37] K. Liu, I. Laine, A note on value distribution of difference polynomial, Bull. Aust. Math. Soci. 81(3) (2010) 353-360.

[38] K. Liu, L. Z. Yang, Value distribution of the difference operator, Arch. Math. 92 (2009) 270-278.

[39] A. I. Markushevich, Theory of Functions of a Complex Variable, Vol. 2, translated by R. A. Silverman (Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall, 1965).

[40] P. Montel, Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valurs exceptionnelles dans un domiane (French), Ann. Sci. Ecole Norm. Sup, 29 (1912), 487-535.

[41] E. Mues, über ein problem von Hayman, Math. Z. 164 (1979) 239-259.

[42] I. B. Oshkin, On a test for the normality of families of holomorphic functions, Uspekhi Mat. Nauk, 37(2)(1982) 221-222.

[43] X. C. Pang, Bloch principle and normal criterion, Sci China. Ser A, 32 (1989) 782-791.

[44] X. C. Pang, L. Zalcman, Normal families and shared values, Acta Math. 76 (2000) 171-182.

[45] X. C. Pang, L. Zalcman, Normal families and shared values, Bull London Math Soc. 32 (2000) 325-331.

[46] J. M. Qi, J. Ding, Normality criteria for families of meromorphic function concerning shared values, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 35(2) (2012), 449十457.

[47] J. M. Qi, J. Ding, T. Y. Zhu, Some results about a special nonlinear difference equation and uniqueness of diffrence polynomial, J. Ineq. Appl. 50 (2011) 1-10.

[48] X. G. Qi, K. Liu, Uniqueness and value distribution of differences of entire functions, J. Math. Anal. Appl. 379 (2011) 180-187.

[49] L. A. Rubel, Four counterexamples to Bloch' s principle, Proc. Amer. Math. Soc. 98 (1986), 257-260.

[50] J. Schiff, Normal Families, Springer-Verlag, Berlin, (1993).

[51] W. Schwick, Exceptional functions and normality, Bull. London Math. Soc. 29 (1997) 425-432.

[52] W. Schwick, Sharing values and normality, Arch. Math. 59 (1992) 50-54.

[53] Y. F. Wang, M. L. fang, Picard value and normal families of meromorphic functions with multiple zeros, Acta Math. Sinica. 14(1) (1998) 17-26.

[54] J. M. Whittaker, Interpolatory Function Theory, Cambridge University Press, (1935).

[55] Y. Xu, On a result due to Yang and Schwick (in Chinese). Sci. Sin. Math. 40(5) (2010): 421-428.

[56] Y. Xu, Picard values and derivatives of meromorphic functions. Kodai Math J. 28 (2005) 99-105.

[57] J. Y. Xia, Y. Xu, Normality criterion concerning sharing functions II, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 33 (2010), no.3 479-486.

[58] K. Yamanoi, The second main theorem for small functions and related problems, Acta Math. 192 (2004) 225-294.

[59] L. Yang, Value distribution theory, Springer-Verlag, Berlin, (1993).

[60] L. Yang, Normal families and fixed-points of meromorphic functions, Indiana Univ. Math. 192 (2004) 225-294.

[61] C. C. Yang, H. X. Yi, Uniqueness Theory of Meromorphic Functions, Kluwer Academic Publishers (2003).

[62] L. Yang, G. H. Zhang, Recherches sur la normalité des familles de fonction analytiques à des valeurs multiples, I. Un nouveau critère et quelques applications. Sci China. Ser A, 14(1965) 1258-1271; II. Géneralisations, Ibid. 15 (1966) 433-453.

[63] L. Zalcman, Normal families: New perspectives, Bull. Amer. Math. Soc. 35 (1998) 215-230.

[64] Q. C. Zhang, On normal criterion of holomorphic functions, Math. Practice and Theory. 36 (2006) 283-286.

[65] Q. C. Zhang, Some normality criteria of meromorphic functions, Complex Variables and Elliptic Equations, 53 (2008) 791-795.

[66] Z. L. Zhang, W. Li, Picard exceptional values for two class differential polynomials, Acta. Math. Sinica. 34 (1994) 828-835.

[67] J. L. Zhang, R. Korhonen, On the Nevanlinna characteristic of f(qz) and its applications, J. Math. Anal. Appl. 369 (2010) 537-544.

致 谢

时光荏苒，岁月如梭．如今，我已在山东大学度过了三个年头．三年，一段不短的人生历程，让我的人生有了不同的轨迹．在漫长的人生旅程中，三年时间并不算长，但对我而言，却是人生中最重要的三年．三年来我承受师恩、增长学识、提高科学素养，时刻准备以一个新面貌，投入到教学科研工作中去．在此，谨对培育我的母校、教导我的老师、帮助我的同学们致予最诚挚的谢意和敬意．

在山东大学数学学院学习的三年里，我亲身体会到各位老师和前辈们严谨求实的治学态度、渊博卓著的学识才华和传道授业、以身作则、高尚无私的敬业精神，已经超脱了知识传授和文化交流的范畴，形成独立自主、兼容并包的治学氛围和积极进取、紧贴实际、关心家国的人文情怀．我为能在山东大学数学学院学习而感到荣幸和自豪，这段经历让我受益匪浅．

回想三年研究生生涯，给我提供帮助的人颇多，其中最应感谢我的导师杨连中教授．衷心感谢我的恩师对我的淳淳教诲和悉心关怀，在我研究生三年里，他给予了我生活上、学习上无微不至的关心，让我永生难忘．恩师对我的指导和影响之大，怎样言说都表达不尽，自己取得的点滴成绩无不凝聚着恩师的心血．恩师国际化的视野，前沿而精髓的学术造诣，严谨勤奋的治学风格，深刻影响着我日后的工作和生活．师恩如海，衔草难报．同样感谢在德国联合培养期间 Walter Bergweiler 教授的悉心指导和帮助，他不仅在生活上给与一定的关心，而且在其指导下我接触了一个全新的研究方向．

感谢我的硕士生导师广州大学数学院袁文俊教授一直以来对我的关怀和帮助．

衷心感谢山东大学数学学院其他老师给予我的帮助，其中特别要感谢的是仪洪勋教授、扈培础教授对我指导和帮助．正是您们的教导，开阔了我的视野，加深了我对基础数学专业学习研究的浓厚兴趣．

同时感谢我的学长：吕锋博士，张继龙博士，刘凯博士，齐晓光博士，戚建明博士，张国威博士在我学习和成长过程中的帮助．感谢和我一起上讨论班的同学及师弟师妹们：曹银红，刘永，李楠，刘艳，王振华等等，感谢你们的相伴和帮助！

最后，我要特别感谢我的父母和家人，他们为我付出的太多但对我要求却太少，是他们含辛茹苦养育我，有了他们的爱护和关心，我才能安心读书，追求学

业的成功. 给予我的都是关怀、支持和理解.

感谢在百忙之中评审我博士学位论文的各位专家和学者!

特别感谢所有支持过我、帮助过我、批评过我、鼓励过我和理解过我的人们!

丁杰

济南, 2012 年 4 月

攻读博士学位期间完成论文情况

1. *Normality Criteria of Meromorphic Functions That Share a Holomorphic Function*, Abstr. Appl. Anal, vol. 2012, Article ID 582854, 2012, 11 pages, doi:10.1155/2012/582854. (First author) (SCI).

2. *Value Distribution of Difference Operator on Meromorphic Functions*, (submitted). (First author).

3. *Normal criteria for families of meromorphic function concerning shared values*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc, 35(2) (2012), 449-457, (Second author) (SCI).

4. *Some normal criteria about shared values with their multiplicity zeros*, Journal of Inequalities and Applications 2011, 2011:50. (Second author) (SCI).

5. *Bäcklund Transformation and New Exact Solutions of the Sharma-Tasso-Olver Equation*, Abstr. Appl. Anal, vol. 2011, Article ID 935710, 2011, 8 pages, doi:10.1155/2012/582854. (Second author) (SCI).

参与的科研项目:

1. 国家自然科学基金 (No.10671109).

2. 山东省自然科学基金 (No. Z2008A01).

学位论文评阅及答辩情况表

	姓名	专业技术职务	是否博导（硕导）	所在单位	总体评价※
论文评阅人	仪洪勋.	教授	是	山东大学	A.
	盲审.				A
	盲审				A.

		姓名	专业技术职务	是否博导（硕导）	所在单位
答辩委员会成员	主席	王宏.	教授	是	University of South Carolina
	委员	张顺华	教授	是	山东大学.
		仪洪勋	教授	是	山东大学
		庞培础	教授	是	山东大学
		B. Drangovih	教授	是	University of Belgrade.

答辩委员会对论文的总体评价※	A.	答辩秘书	祁昳光	答辩日期	2012.5.26.
备注					

※ 优秀为“A”；良好为“B”；合格为“C”；不合格为“D”。

关于正规族及差分多项式值分布问题的研究

作者： 丁杰
学位授予单位： 山东大学